Ejercicios del Tema 2. Grupos.

1.- Sea $\mathbb{R}^*$ el conjunto de los números reales distintos de 0. Demuestra que $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ es un grupo con la operación siguiente: $(x,y)\#(x',y') = (xx', y'/x + x'y)$.

2.- Sea $G = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$. En G se define la operación

$$(a,b) * (c,d) = (ac, ad+b).$$

a) Prueba que $(G,*)$ es un grupo.

b) Demuestra que $H = \{(a,0) \in G \mid a \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ y $T = \{(1,t) \in G \mid t \in \mathbb{R}\}$ son subgrupos de G.

3.- Sea $(G,*)$ un grupo conmutativo con $|G| < 100$ tal que existen elementos $a,b \in G$ con orden$(a) = 10$ y orden$(b) = 12$. Calcula $|G|$.

4.- Demuestra que:

a) Si G es un grupo finito de orden 4 no cíclico, todo elemento $a \in G$ es inverso de sí mismo.

b) Si en un grupo G todo elemento es inverso de sí mismo, entonces, G es conmutativo.

5.- Sea $(G,\cdot)$ un grupo de cardinal 16. Demuestra que si existe un elemento $a \in G$ tal que $a^8 \neq e$ entonces G es un grupo cíclico.

6.- Sea M el conjunto de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{con } a,b \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0.$$

Demuestra que M es un grupo con el producto usual de matrices y que M tiene infinitos elementos de orden 2.

7.- Demuestra que la intersección de subgrupos de G es un subgrupo de G, pero que no necesariamente la unión de subgrupos es un subgrupo.

8.- Sean H y K subgrupos finitos de G tales que el cardinal de H y el cardinal de K son primos entre sí. Prueba que $H \cap K = \{e\}$.

9.- Sea $(G,*)$ un grupo y sean a, b elementos de G. Demuestra que a, a^{-1} y bab^{-1} tienen el mismo orden.

Si $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$, es tal que $(a*b)^n = a^n * b^n$, $\forall a,b \in G$, demuestra que

$$H = \{x \in G \text{ tales que } orden(x) | n\}$$

es un subgrupo de G.

10.- Sea $G = \{e,a,b,g,w,d\}$ un grupo con la operación $*$, donde e es el elemento neutro. Sabiendo que el orden d es 3 y que

$$a*d = g, \quad d*a = b, \quad b*d = a, \quad d*b = g, \quad a*b = w, \quad a^2 = e$$

a) Halla la tabla del grupo.

b) Halla los subgrupos de G.

11.- Consideramos las funciones $f_i : \mathbb{R} - \{0,1\} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$\begin{array}{lll} f_1(x) = x; & f_2(x) = 1/x; & f_3(x) = 1-x; \\ f_4(x) = 1/(1-x); & f_5(x) = (x-1)/x; & f_6(x) = x/(x-1). \end{array}$$

Demuestra que el conjunto $A = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ con la operación composición, es un grupo no conmutativo (construye la tabla). Halla los posibles subgrupos de A.

12.- Sea G un grupo cíclico de cardinal 9 y sea a un elemento generador de G. Se considera el elemento $b \in G$, $b = a^3$. Halla:

a) el orden de b,

b) el subgrupo H generado por b,

c) los elementos del grupo cociente G/H y la tabla correspondiente.

13.- Sea G un grupo. Razona la veracidad o falsedad de las afirmaciones siguientes:

a) Si $\#G = 31$, entonces G es conmutativo.

b) Si $\#G = 35$, entonces todos los subgrupos propios de G son cíclicos.

c) Si G no tiene subgrupos propios, entonces G es cíclico.

d) Si $g \in G$ tal que el orden g es 8. Entonces orden $\left(g^6\right) = 8$.

e) Si G es cíclico con un único elemento generador, entonces el cardinal de G es 1 ó 2.

f) Si $g \in G$ con orden$(g) = n$ y H es un subgrupo de G tal que $g^m \in H$, siendo n y m primos entre sí, entonces $g \in H$.

14.- Demuestra que $H = \{00000, 10111, 01101, 11010\}$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}_2)^5$ y halla el grupo cociente correspondiente.

15.- Construye las tablas de la operación suma en los grupos $\mathbb{Z}_{20}/ < 4 >$ y $\mathbb{Z}_{20}/ < 5 >$.

16.- Sea $G = \{e, x, y, z\}$ un grupo, con elemento neutro e y G no cíclico. Escribe la tabla de la operación de G y construye una aplicación biyectiva de G en $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$.

17.- Sea $f : \mathbb{R} - \{0\} \to (0, \infty)$ la aplicación definida por $f(x) = |x|$. Demuestra que f es un morfismo de grupos con la operación producto en ambos conjuntos. Halla $\operatorname{Ker} f$.

18.- Sea $f : G \to G'$ un morfismo de grupos, demuestra que

a) el orden de un elemento x de G es múltiplo del orden de $f(x)$,

b) el orden de x coincide con el orden de $f(x)$ si f es inyectiva.

19.- Sea G un grupo y $f : G \to G$ definida por $f(x) = x^{-1}$. Demuestra que f es un isomorfismo si, y sólo si, G es conmutativo.

20.- Sea G un grupo cíclico de cardinal n, demuestra que $f : G \to G$ definida por $f(x) = x^k$, donde k es primo con n, es un isomorfismo de G.

21.- En el conjunto $A = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ se define la operación $(x, y) * (x', y') = (xx', yy')$. Demuestra que $(A, *)$ es un grupo y que la aplicación $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \lg(x) + \lg(y)$ es un morfismo de grupos de $(A, *)$ a $(\mathbb{R}, +)$. Halla $\operatorname{Ker} f$.