Tema 3. Anillos y cuerpos.

1. En el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales se definen las siguientes operaciones: para $a, b \in \mathbb{Q}$, $a * b = a + b - k$, siendo $k \in \mathbb{Q}$ un valor fijo y $a \# b = a + b - ab$.

Estudia la estructura $(\mathbb{Q}, *, \#)$ según los valores de k.

2. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo con tablas dadas por

$+$	s	t	x	y
s	y	x	s	t
t	x	y	t	s
x	s	t	x	y
y	t	s	y	x

$\cdot$	s	t	x	y
s	y	y	x	x
t	y	y	x	x
x	x	x	x	x
y	x	x	x	x

(a) ¿Cuál es el cero de este anillo?

(b) ¿Cuál es el opuesto de cada elemento?

(c) ¿Cuánto vale $s \cdot (t + x \cdot y)$?

(d) ¿Es A un anillo conmutativo? ¿Es A un anillo unitario? ¿Es A un dominio?

3. Sabiendo que $(A, +, \cdot)$ es un anillo, completa las tablas dadas por:

$+$	s	t	x	y
s	s	t	x	y
t	t	s	y	x
x	x	y	s	t
y	y	x	t	s

$\cdot$	s	t	x	y
s	s	s	s	s
t	s	t		
x	s	t		y
y	s		s	

(a) ¿Es conmutativo este anillo?

(b) ¿Tiene elemento neutro la segunda operación?

4. Consideremos $(\mathbb{R}^+, \cdot, *)$ siendo $\cdot$ el producto usual en $\mathbb{R}$ y $a * b = a^{log_2 b}$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+$. Prueba que $(\mathbb{R}^+, \cdot, *)$ es un anillo conmutativo unitario. ¿Es un dominio de integridad? ¿Es un cuerpo?

5. Sea X un conjunto, demuestra que el anillo $(P(X), \oplus, \cap)$ es conmutativo unitario y que todo elemento distinto de X es divisor de cero.

6. Se sabe que $(\mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ es un anillo, siendo $x \oplus y = x + y + 1$ y $x \otimes y = x + y + xy$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Z}$. Analiza si los conjuntos $\{5n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ y $\{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ son ideales del anillo anterior.

7. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo donde $a \cdot a = a$ para todo $a \in A$. Demuestra que:

(a) $a + a = 0$, para todo $a \in A$,

(b) A es un anillo conmutativo,

(c) si A es unitario y tiene más de 2 elementos, entonces A no es un dominio.

8. Sea $(A, +, \cdot)$ un dominio entero. Prueba que si $a \cdot a = 1$ entonces $a = 1$ ó $a = -1$. ¿Se verifica esto en un anillo con divisores de cero?

9. (a) En el anillo $\mathbb{Z}_{15}$ demuestra que $A = \{0, 3, 6, 9, 12\}$ es un ideal.

(b) ¿Tiene A estructura de cuerpo?

10. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo unitario y $f : A \to A$ una aplicación tal que

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \qquad f(a \cdot b) = a \cdot f(b) + b \cdot f(a)$$

para cualesquiera $a, b \in A$. Demuestra que:

(a) $B = \{x \in A \mid f(x) = 0\}$ es un subanillo de A (siendo 0 el neutro para $+$).

(b) Si $x \in A$ es una unidad de A, entonces $f(x) + x^2 f\left(x^{-1}\right) = 0$.

11. Sea K un cuerpo. En el anillo de las matrices 2×2 con coeficientes en K, con la suma y el producto usuales, se considera el subanillo

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in K \right\}.$$

Demuestra que si $K = \mathbb{Z}_3$ entonces S es un cuerpo, pero no lo es si $K = \mathbb{Z}_5$.

12. Encuentra los subanillos y los ideales de $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$, y $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$.

13. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo y $f : A \to A$ un morfismo de anillos, demuestra que $S = \{x \in A / f(x) = x\}$ es un subanillo de A. ¿Es S un ideal de A?

14. Justifica en cuáles de los siguientes casos, el conjunto J es un ideal del anillo $(A, +, \cdot)$. En los casos afirmativos, da un generador de J.

(a) J es el conjunto de los polinomios en $A = \mathbb{Q}[x]$ tales que, 0 y 3 son raíces.

(b) $A = \mathbb{Z}_6$ y $J = \mathrm{Ker}(f)$ con $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$ definida por $f([x]) = [2x]$, para cada $[x] \in \mathbb{Z}_6$.

15. Sean $a(x) = 3x^3 + 5x^2 + x + 1$ y $b(x) = 3x^2 + x + 5$ polinomios en $K[x]$. En los casos $K = \mathbb{Z}_7$ y $K = \mathbb{Q}$, halla $d(x) = \text{m.c.d.}(a(x), b(x))$ y escríbelo de la forma $d(x) = h(x) \cdot a(x) + s(x) \cdot b(x)$.

16. En $\mathbb{R}[x]$, halla el ideal $I = (x^2 + x - 2) \cap (x^2 - 1)$.

17. En $\mathbb{Z}_2[x]$, demuestra que $1 + x$ es un divisor de $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ si, y sólo si, n es impar.

18. Sea $a(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ en $\mathbb{Z}_3[x]$. Demuestra que,

(a) $1 + x$ es un divisor de $a(x)$ si, y sólo si, n es impar,

(b) $2 + x$ es un divisor de $a(x)$ si, y sólo si, $n \equiv 2 \bmod 3$.

19. Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que el resto al dividirlo por $x + 1$ es -45 y al dividirlo por $x - 3$ es -165. Halla:

(a) el resto al dividir $p(x)$ por $x^2 - 2x - 3$,

(b) $p(x)$, sabiendo que su grado es 4 y es divisible por $x(x^2 - 4)$,

(c) las raíces de $p(x)$.

20. Halla los valores de los números primos $p > 1$ tales que el producto $[x + 3]$ por $[x^2 + 1]$ es nulo en el anillo cociente $\mathbb{Z}_p[x]/(x^3 + x^2 + x + 1)$.

21. (a) Prueba que $1 + x^2$ es irreducible en $\mathbb{R}[x]$, pero que no lo es en $\mathbb{Z}_2[x]$.

(b) Estudia si el polinomio $p(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x + 2$ es reducible en $\mathbb{Z}_5[x]$.

22. Calcula las unidades y los divisores de cero en el anillo $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + 1)$.

23. (a) Demuestra que el anillo cociente $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + x + 1)$ es un cuerpo.

(b) Demuestra que el anillo cociente $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + 1)$ no es un cuerpo.

(c) Halla el inverso de la clase del polinomio $2x + 3$ en el cuerpo del apartado a). ¿Tiene inverso en el anillo del apartado b)?

24. Considera el anillo cociente $\mathbb{Z}_2[x]/(x^4 + x^3 + 1)$. Comprueba que es un cuerpo, calcula su cardinal, su característica y el inverso de la clase del polinomio $x^3 + x + 1$.

25. Sea F un cuerpo finito. Sabemos que F[x] tiene 729 polinomios mónicos de grado 4 sin término constante. Hallar el orden de F y su característica.

26. Construye un cuerpo de cardinal 125. ¿Cuál es su característica?