Ejercicios del Tema 4 y 5. Sistemas de ecuaciones lineales, Matrices y Determinantes.

1. Resuelve, usando el método de Gauss o Gauss-Jordan en $\mathbb{R}$, los sistemas siguientes:

$$\text{i)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ & & y & + & z & = & 1 \\ 2x & & & + & 2z & = & 2 \end{array} \right. \qquad \text{ii)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & + & z & = & 10 \\ x & - & 2y & - & z & = & -2 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & - & 3z & = & 7 \end{array} \right.$$

2. Resuelve, usando el método de Gauss o Gauss-Jordan, los sistemas siguientes:

$$\text{i) En } \mathbb{Z}_5 \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 3 \\ x & + & 4y & + & 4z & + & t & = & 1 \\ x & + & 4y & + & z & + & t & = & 4 \\ x & + & y & + & 4z & + & t & = & 0 \end{array} \right. \qquad \text{ii) En } \mathbb{Z}_7 \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & -2 \\ 2x & + & y & - & z & = & 6 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \end{array} \right.$$

3. Resuelve según los valores de a y utilizando el método de Gauss el siguiente sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & az & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 1 \\ ax & + & y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

4. Estudia las soluciones de sistema siguiente, según los valores de $a \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 6x & - & y & + & z & = & 3a \\ x & - & y & + & z & = & 1 \\ 3x & - & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & y & + & z & = & a^2 \end{array} \right.$$

5. En $\mathbb{Z}_7$, estudia el sistema siguiente, según los valores de $a \in \mathbb{Z}_7$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} ax & + & 5y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 6y & + & az & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 6z & = & 4 \end{array} \right.$$

6. Estudia las soluciones de sistema siguiente, según los valores de a, en los cuerpos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Z}_3$.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array} \right.$$

7. Halla la inversa de las matrices siguientes usando operaciones elementales en $\mathbb{R}$

$$\text{i)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Escribe los sistemas siguientes, con coeficientes en $\mathbb{Z}_{11}$, en forma matricial $AX = B$ y resuélvelos como $X = A^{-1}B$.

$$\text{i)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & + & 9t & = & 4 \\ x & + & 10y & + & 10z & + & 8t & = & 4 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & + & 8t & = & 4 \\ 3x & + & 5y & + & 5z & + & 10t & = & 4 \end{array} \right. \qquad \text{ii)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & -1 \\ 5x & + & 7y & + & 2z & = & -1 \end{array} \right.$$

9. Prueba, utilizando las propiedades de los determinantes, las siguientes igualdades en $\mathbb{R}$

$$\text{i) } det\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & m & n \\ -a & -b & c & p \\ -a & -b & -c & d \end{pmatrix} = 8abcd. \qquad \text{ii) } det\begin{pmatrix} bc & 1/a & a \\ ac & 1/b & b \\ ab & 1/c & c \end{pmatrix} = 0.$$

10. Sean $A \in \mathcal{M}_n(K)$ y $\lambda \in K$. Prueba que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot det(A)$.

11. Demuestra la igualdad siguiente en $\mathbb{R}$

$$det\begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{pmatrix} = 2 \cdot det\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

12. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisimétrica ($A^T = -A$). Demuestra que $detA = 0$ si n impar. ¿Ocurre lo mismo si su orden es par?

13. Prueba, para todo $n \in \mathbb{N}$, la siguiente igualdad en $\mathbb{R}$.

$$det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{0<j<i<n+1} (x_i - x_j).$$

14. Resuelve utilizando la regla de Cramer el siguiente sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x & & & + & 4z & = & 3 \\ x & + & 4y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & 4z & = & 1 \end{array} \right.$$

15. Resuelve utilizando la regla de Cramer el siguiente sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_{13}$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 11y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & 2y & & & = & 7 \\ 5x & + & 10y & + & 4z & = & 1 \end{array} \right.$$

16. Obtener el valor de $a \in \mathbb{Z}_7$, para que la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 6 & a \end{pmatrix}$$

con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$, tenga rango 2.

17. Dado en $\mathbb{R}$ el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & (m-1)y & - & z & = & 0 \\ (m-1)x & + & 3y & + & z & = & m \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

Calcula $m \in \mathbb{R}$ para que el sistema:

(a) Tenga solución única. Calcula dicha solución para $m = 0$.

(b) Tenga infinitas soluciones.

(c) ¿Hay algún valor de m para el cual el sistema no tiene solución?