Álgebra, curso 2006–2007

Ejercicios del Tema 6. Espacios vectoriales.

1. ¿Cuáles de los conjuntos siguiente son subespacios vectoriales del espacio correspondiente? Halla una base en aquellos que sean subespacios.

   a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = z\}$.

   b) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 1\}$.

   c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0 \text{ ó } z = 0\}$.

   d) $W = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_3)^3, x = y\}$.

   e) $W = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_2)^3, x + y = 0\}$.

   f) $W = \{p(x) \in P_n(\mathbb{R}), p(1) = 0\}$.

2. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ una base de V. Prueba que $B' = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4 + v_5, v_5 + v_1\}$ también es una base de V.

3. Prueba que los vectores $(1, 0, -1)$, $(2, 1, 3)$ y $(1, 2, 9)$ son dependientes en $\mathbb{R}^3$ y encuentra una relación de dependencia lineal entre ellos.

4. Halla las ecuaciones del espacio $U =< (1, 2, 4), (1, 3, 4), (0, 0, 4) >$ de $(\mathbb{Z}_5)^3$.

5. En $P_2(\mathbb{Z}_7)$, espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 y coeficientes en $\mathbb{Z}_7$, se consideran los subespacios $U = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in P_2(\mathbb{Z}_7) \mid a_2 = 0\}$ y $W = \langle\{2 + x - x^2, 1 + 2x + x^2\}\rangle$. Calcula una base de $U \cap W$.

6. Halla las ecuaciones del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1, 6, 2, 1)$ y $(0, 1, 1, 2)$. Comprueba si el vector $(0, 1, 2, 2)$ pertenece o n a ese subespacio.

7. Sea $U = \{a(x) \in \mathbb{Z}_5[x] \mid \text{grado}(a(x)) \leq 2\}$. Determina si $\{1 + 2x^2, 1 + x\}$ y $\{1 + 2x^2, 1 + x, 2x\}$ generan el $\mathbb{Z}_5$-espacio vectorial U.

8. Calcula m tal que los vectores $(m + 6, 2 + 4m)$ y $(2m + 4, m + 5)$ forman una base de $(\mathbb{Z}_7)^2$.

9. Calcula una base del espacio
$$U = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3), \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} M = M \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\}.$$

10. Halla la dimensión y una base del subespacio de $(\mathbb{Z}_3)^4$ generado por los vectores $(0, 1, 0, 0)$, $(2, 0, 0, 1)$, $(1, 2, 0, 2)$, $(0, 2, 0, 2)$. Calcula las ecuaciones de ese subespacio.

11. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios
$$U = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a + d = b = 0\} \qquad V = \{A; A + A^t = 0\}.$$
Halla la dimensión y una base de U, V y $U \cap V$.

12. Sea $V = P_3(\mathbb{R})$ y sean U_1, U_2 y U_3 los subconjuntos de V definidos por:
$$U_1 = \{p(x) \in V \mid p(0) = 0\},\ U_2 = \{p(x) \in V \mid p(1) = 0\} \text{ y } U_3 = \{p(x) \in V \mid xp'(x) = p(x)\},$$
donde $p(x)$ es el polinomio derivada de $p(x)$.

    a) Demuestra que U_1, U_2 y U_3 son subespacios vectoriales de V.

    b) Halla una base y la dimensión de U_1, U_2, U_3, $U_1 \cap U_2$, $U_1 \cap U_3$ y $U_2 \cap U_3$.

13. Sea $V = \{p(x) \in \mathbb{Z}_3[x], \partial(p(x)) \leq 2\}$ y sean $1 - x + ax^2$, $1 + 2x + x^2$, $x^2 + b$ en V:

   a) Calcula a y b en $\mathbb{Z}_3$ para que los tres vectores sean linealmente independientes.

   b) Halla a y b en $\mathbb{Z}_3$ para que el subespacio que generan tenga dimensión 1.

   c) Para $b = 2$, halla una base y las ecuaciones del subespacio generado por ellos.

14. Halla el rango de las matrices reales siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

15. Estudia si las matrices reales siguientes son equivalentes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

16. Calcula el rango de A según los valores de a y b ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

17. Estudia la existencia de soluciones del sistema siguiente en función de los valores de a y b ($a, b \in \mathbb{R}$). Halla las soluciones cuando existan.

$$\text{a)} \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = 1 \\ x + by + az = 1 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} ax + 2z = 2 \\ 5x + 2y = 1 \\ x - 2y + bz = 3 \end{cases}$$

18. Halla los valores de a y b para que el conjunto de soluciones del siguiente sistema sea un subespacio vectorial de dimensión 2 en $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - az = 0 \\ x - y - z = b \end{cases}$$

19. a) Sea $AX = B$ un sistema de 20 ecuaciones lineales con 24 incógnitas de modo que el subespacio de soluciones de $AX = 0$ está generado por cuatro vectores linealmente independientes, ¿el sistema $AX = B$ es compatible para cualquier b?

   b) Sea $AX = 0$ un sistema de ecuaciones lineales con 20 incógnitas cuyo subespacio de soluciones está generado por 6 vectores linealmente independientes. ¿Cuál es el rango de A?

20. Demuestra que $B = \{(1, -1, 0), (1, 2, 1), (0, 1, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

   a) Halla $[\vec{u}]_B$ si $[\vec{u}]_{C_3} = (-2, 5, 3)$.

   b) Calcula las matrices de cambio de base M_{BC_3} y M_{C_3B}. Halla el producto de las matrices obtenidas.

   c) Resuelve el apartado (a) utilizando una de las matrices anteriores.

21. Sean $B = \{(1, 1, 0), (0, 2, 6), (1, 0, 3)\}$ y $B' = \{(1, 0, 6), (2, 3, 4), (3, 3, 0)\}$ bases de $(\mathbb{Z}_7)^3$.

   a) Halla las matrices de cambio de base de $M_{BB'}$ y $M_{B'B}$. Halla el producto de estas matrices.

   b) Halla las coordenadas $[\vec{u}]_B$ y $[\vec{u}]_{B'}$ si $[\vec{u}]_{C_3} = (1, 2, 5)$.

   c) Calcula $[\vec{u}]_{B'}$ si $[\vec{u}]_B = (1, 2, 5)$.