Tema 7. Aplicaciones lineales.

1. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación $f(x, y, z, t) = (x - y + z + 4t, x - y + 6t, z - 2t, x - y + 6t)$. Halla una base y las ecuaciones de $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$. Completa la base de $\operatorname{Ker} f$ a una base de $\mathbb{R}^4$.

2. Hallar la matriz $M_{BB}(f)$ asociada al endomorfismo $f : (\mathbb{Z}_{11})^3 \to (\mathbb{Z}_{11})^3$ determinado por

$$f(\vec{v}_1) = \vec{v}_1 + \vec{v}_3, \quad f(\vec{v}_2) = 2\vec{v}_1 + 10\vec{v}_2, \quad \operatorname{Ker} f = \langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \rangle,$$

   siendo $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base de $(\mathbb{Z}_{11})^3$. Calcula $f^{-1}(8\vec{v}_1 + 8\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3)$ y una base y las ecuaciones de $\operatorname{Im} f$ en función de B.

3. Define, cuando sea posible, las aplicaciones siguientes:

   (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\operatorname{Ker} f =< (1, 1, 1) >$ y $(0, 2) \in \operatorname{Im} f$,

   (b) $g : (\mathbb{Z}_3)^3 \to (\mathbb{Z}_3)2$ tal que $\operatorname{Ker} g = (0, 0, 0)$,

   (c) $h : (\mathbb{Z}_7)^3 \to (\mathbb{Z}_7)^3$ tal que $\operatorname{Ker} h = (0, 0, 0)$ y $(0, 2, 1) \in \operatorname{Im} h$,

   (d) $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ tal que $\operatorname{Ker} f =< (1, 4, 2), (1, 4, 3) >$ y $dim \operatorname{Im} f = 2$.

4. Sea $f : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal definida por $f(p(x)) = p''(x) + xp'(x) - 3p(x)$. Calcula la matriz asociada a f respecto a las bases canónicas, una base de $\operatorname{Ker} f$ y $f^{-1}(1 + x^2)$.

5. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x - y + z, 0)$.

   (a) Halla $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$, base de $\operatorname{Ker} f$, base de $\operatorname{Im} f$.

   (b) ¿f es inyectiva? ¿es sobreyectiva?

   (c) Halla la matriz asociada a f respecto a las respectivas bases canónicas.

   (d) ¿Cuál es el rango de la matriz anterior? (debes saber cual es sin calcularlo).

6. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada es

$$\mathrm{M}_{CC}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -3 & b \\ 1 & a & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Halla $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $(1, 0, 0, 1) \in \operatorname{Ker} f$, y f es sobreyectiva.

   (b) Para $a = b = 0$, halla $f(-1, 2, 1, 0)$ y $f^{-1}(\{(0, 1, 0)\})$.

   (c) Sea $B = \{(1, 0, 1), (-1, 0, 2), (0, 1, 0)\}$. Calcula la matriz $\mathrm{M}_{CB}(f)$ en el caso $a = b = 0$,

7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal definida por

$$f(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1, \quad f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \lambda\vec{e}_3, \quad f\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2 + \lambda\vec{e}_3$$

   siendo $C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Calcula los valores λ y μ para los que f no es inyectiva.

   (b) Para el valor de λ obtenido en el apartado anterior, calcula, en función de μ, la dimensión, una base y las ecuaciones de $\operatorname{Im} f$ y $\operatorname{Ker} f$. Calcula $f^{-1}(4, 3, 0)$.

8. Sea $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $f(A) = (a_{11} + a_{22}, a_{12} - a_{21})$. Halla la matriz asociada a f respecto a las bases canónicas de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y de $\mathbb{R}^2$. Halla una base de la imagen y una del núcleo. ¿Es f sobreyectiva? ¿Es inyectiva?

9. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que

$$f(1,0,0,0) = (1,0,0), \quad f(0,0,0,1) = (0,0,1), \quad \operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+z = 0, z+t = 0\}.$$

   (a) Halla la matriz de f respecto a las bases canónicas.
   (b) Calcula la dimensión, una base y las ecuaciones de $\operatorname{Im} f$.
   (c) Halla el conjunto $f^{-1}(\{(1,0,2)\})$.
   (d) Si $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x = y\}$, halla $f(W)$.

10. Sean $p \in \mathbb{N}$ tal que $1 < p < 10$, y $f : (\mathbb{Z}_p)^3 \to (\mathbb{Z}_p)^3$ una aplicación entre espacios vectoriales tal que $f(1,0,1) = (2,5,4)$, $f(1,5,1) = (1,1,0)$ y $f(0,0,2) = (-2,1,2)$.

   (a) ¿Para qué valores de p, estos datos determinan una aplicación lineal?
   (b) ¿Para qué valores de p es f un isomorfismo?

11. Define una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $\operatorname{Ker} f =< (1,4,2) >$ e $\operatorname{Im} f =< (0,1,0),(0,1,1) >$. Halla $f^{-1}(\{(1,3,4)\})$ y calcula la matriz $\mathcal{M}_{BB}(f)$, siendo $B = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$. ¿Es f un isomorfismo?

12. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $f(0,0,1) = (1,2,3), (0,2,1) \in \operatorname{Ker} f$ y $f \circ f = 0$.

   (a) Halla la matriz de f respecto a las bases canónicas .
   (b) Demuestra que la aplicación $Id - f$ es un isomorfismo, siendo Id la aplicación identidad.

13. Dadas las aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $f(x,y,z) = (x+y,y,z)$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $g(x,y,z) = (y,x,z-y)$, y las bases $B_1 = \{(1,1,0),(2,0,3),(-1,1,2)\}$, B_2 la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $B_3 = \{(1,1,-1),(1,-1,1),(0,1,2)\}$. Halla la matriz $\mathcal{M}_{B1B3}(f \circ g)$ y comprueba que coincide con el producto de las matrices asociadas a f y a g, tomando como base intermedia B_2.

14. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a las bases canónicas es

$$\mathrm{M}_{C_3C_3}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -a \\ 2 & 6 & -2a \\ 1 & 3 & 1+a \end{pmatrix}$$

   Calcula los valores de $a \in R$, para los cuales f es un isomorfismo. Halla la aplicación $f^{-1} \circ f^{-1}$ para el caso $a = 0$.

15. Sea $P_2[X]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que dos y sea $f : \mathbb{R}^3 \to P_2[X]$ la aplicación lineal definida por: $f(1,0,1) = a + bX$, $f(0,1,-1) = aX + bX^2$, $f(0,0,1) = b + aX$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$.

   (a) Halla la matriz asociada a f respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y de $P_2[X]$.
   (b) ¿Para qué valores de a y b la aplicación f es un isomorfismo?
   (c) Suponiendo que b = 0, halla la dimensión y una base del núcleo de f y de la imagen de f.
   (d) Tomando a y b de modo que f sea un isomorfismo, halla una base y las ecuaciones de $f(U)$, para $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+z = y+z = 0\}$.

16. Sea $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base cualquiera de $(\mathbb{Z}_5)^3$ y sea $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ la aplicación lineal definida por: $f(\vec{v}_1) = (4,1,0)$, $f(\vec{v}_2) = (1,3,4)$ y $f(\vec{v}_3) = (2a,b,0)$. Calcula una relación entre $a, b \in \mathbb{Z}_5$ para la cual d$im\, Ker f = 1$.

17. Sea $C_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que

$$f(e_1) = e_1 + \lambda e_2 + e_3, \quad f(e_2) = 2\lambda e_1 + e_2 + e_3 \quad \text{y} \quad f(e_3) = 3e_1 + 5\lambda e_2 + 5e_3.$$

   (a) Halla el valor de λ para que la dimensión de $\operatorname{Ker} f$ sea máxima. Para ese valor de λ, halla $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$, bases y dimensión de esos espacios. ¿f es un isomorfismo? Razona tu respuesta.
   (b) Dada la base $B = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,1)\}$, halla $\mathrm{M}_{BB}(f)$. ¿Cómo se podría calcular esta matriz a través de matrices de cambio de base?