Tema 2. Polinomios con coeficientes en un cuerpo.

1. Halla la suma $a(x) + b(x)$ y el producto $a(x) \cdot b(x)$ en los siguientes casos
   (a) $a(x) = 3x^3 + 5x + 4$ y $b(x) = 4x^3 + 6x + 3$ polinomios en $\mathbb{Z}_7[x]$.
   (b) $a(x) = x^5 - x^3 + 4$ y $b(x) = 4x^2 + 3$ polinomios en $\mathbb{Q}[x]$.

2. Halla el cociente y el resto de dividir $a(x)$ entre $b(x)$ en los siguientes casos, para $K = \mathbb{Z}_5$ y $K = \mathbb{Q}$.
   (a) $a(x) = x^5 - x^3 + x^2 + 7$ y $b(x) = x^2 - 3x + 7$ polinomios en $K[x]$.
   (b) $a(x) = x^5 - x^3 + 3x - 5$ y $b(x) = x^2 + 7$ polinomios en $K[x]$.

3. Calcula las raices del polinomio
   (a) $x^2 + x + 4$ en $\mathbb{Z}_5$.
   (b) $x^4 - x^3 + x^2 - x - 10$ en $\mathbb{Z}$.

4. En $\mathbb{Z}_2[x]$, demuestra que $1 + x$ es un divisor de $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ si, y sólo si, n es impar.

5. Sea $a(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ en $\mathbb{Z}_3[x]$. Demuestra que,
   (a) $1 + x$ es un divisor de $a(x)$ si, y sólo si, n es impar,
   (b) $2 + x$ es un divisor de $a(x)$ si, y sólo si, $n \equiv 2 \bmod 3$.

6. Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que el resto al dividirlo por $x + 1$ es -45 y al dividirlo por $x - 3$ es -165. Halla:
   (a) el resto al dividir $p(x)$ por $x^2 - 2x - 3$,
   (b) $p(x)$, sabiendo que su grado es 4 y es divisible por $x(x^2 - 4)$,
   (c) las raíces de $p(x)$.

7. Comprueba si $q(x) = 2x^2 + 1$ divide a $p(x) = x^4 - x^2 + 1$ en $K[x]$ siendo K

   $(i)\, \mathbb{Q}$ $\qquad$ $(ii)\, \mathbb{Z}_7$ $\qquad$ $(iii)\, \mathbb{Z}_5$

8. Calcula
   (a) el m.c.d.$(x^2 + 1, 2x^2 + 4x)$ en $\mathbb{Z}_5[x]$.
   (b) En los casos $K = \mathbb{Z}_3$ y $K = \mathbb{Q}$, el m.c.m.$(a(x), b(x))$ siendo $a(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ y $b(x) = x^4 - 1$.

9. Sean $a(x)$, $b(x)$ polinomios en $K[x]$. Prueba que m.c.d.$(a(x), b(x)) = 1$ y escríbelo de la forma $1 = h(x) \cdot a(x) + s(x) \cdot b(x)$, en los casos $K = \mathbb{Z}_7$ y $K = \mathbb{Q}$,
   (a) $a(x) = 3x^3 + 5x + 4$ y $b(x) = 4x^3 + 6x + 3$.
   (b) $a(x) = x^4 + 3x^3 + 2x + 2$ y $b(x) = 5x^2 + 2$.
   (c) $a(x) = 3x^3 + 5x^2 + x + 1$ y $b(x) = 3x^2 + x + 5$.

10. (a) Prueba que $1 + x^2$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$, pero que no lo es en $\mathbb{Z}_2[x]$.
    (b) Estudia si el polinomio $p(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x + 2$ es reducible en $\mathbb{Z}_5[x]$.

11. Sea $a(x) = 2x^2 + 2x + 1$ polinomio con coeficientes en el cuerpo K.
    (a) En los casos $K = \mathbb{Z}_3$, $K = \mathbb{Z}_5$, y $K = \mathbb{Q}$, estudia si $a(x)$ es irreducible.
    (b) En los casos reducibles del apartado i), escribe la factorización de $a(x)$ como producto de polinomios irreducibles.
    (c) construye las tablas de la suma y el producto en el anillo cociente $\mathbb{Z}_3[x]/(2x^2 + 2x + 1)$.

12. Determina si la clase del polinomio $a(x)$ es unidad o divisor de cero en el anillo $\mathbb{Q}[x]/(-3+2x+x^2)$ siendo
    (a) $a(x) = 2 + x^2$.
    (b) $a(x) = x^2 + 3x$.
13. Calcula las unidades y los divisores de cero en el anillo
    (a) $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + 1)$.
    (b) $\mathbb{Z}_3[x]/(1 + 2x + 2x^4)$.
14. Sea $\mathbb{Z}_5[x]$ el anillo de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$.
    (a) Demuestra que el anillo cociente $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + x + 1)$ es un cuerpo.
    (b) Demuestra que el anillo cociente $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + 1)$ no es un cuerpo.
    (c) Halla el inverso de la clase del polinomio $2x + 3$ en el cuerpo del apartado i). ¿Tiene inverso en el anillo del apartado ii)?
15. Considera el anillo cociente $\mathbb{Z}_2[x]/(x^4 + x^3 + 1)$. Comprueba que es un cuerpo, calcula su cardinal, su característica y el inverso de la clase del polinomio $x^3 + x + 1$.
16. Sea F un cuerpo finito. Sabemos que F[x] tiene 729 polinomios mónicos de grado 4 sin término constante. Hallar el orden de F y su característica.
17. Construye un cuerpo de cardinal 125. ¿Cuál es su característica?