Álgebra, curso 2007–2008

Ejercicios del Tema 4. Espacios vectoriales.

1. ¿Cuáles de los conjuntos siguientes son subespacios vectoriales del espacio correspondiente? Halla una base en aquellos que sean subespacios.
   (a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y = z\}$
   (b) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x = 1\}$
   (c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 0 \text{ ó } z = 0\}$
   (d) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ 2x + y - z = 3t,\ x - y = 0\}$
   (e) $W = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_3)^3,\ x = y\}$
   (f) $W = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_2)^3,\ x + y = 0\}$
   (g) $W = \{p(X) \in P_n(\mathbb{R}),\ p(1) = 0\}$.
2. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ una base de V. Prueba que $B' = \{v_1 + v_2,\ v_2 + v_3,\ v_3 + v_4,\ v_4 + v_5,\ v_5 + v_1\}$ también es una base de V.
3. Prueba que los vectores $(1, 0, -1)$, $(2, 1, 3)$ y $(1, 2, 9)$ son dependientes en $\mathbb{R}^3$ y encuentra una relación de dependencia lineal entre ellos.
4. Halla las ecuaciones del subespacio $U = < (2, 1, 0), (1, 3, 4), (0, 0, 4) >$ de $(\mathbb{Z}_5)^3$.
5. Halla las ecuaciones del subespacio $H = < (1, 1, 0), (2, -1, 1) > \cap < (-1, 0, 1), (2, 1, 3) >$ de $\mathbb{R}^3$
6. Halla las ecuaciones del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores (1,6,2,1) y (0,1,1,2). Comprueba si el vector (0,1,2,2) pertenece o no a ese subespacio.
7. Sea $U = \{a(x) \in \mathbb{Z}_5[x],\ \text{grado(a(x))} \leq 2\}$. Determina si $\{1 + 2x^2, 1 + x\}$ y $\{1 + 2x^2, 1 + x, 2x\}$ generan el $\mathbb{Z}_5$-espacio vectorial U.
8. Calcula m tal que los vectores $(m + 6, 2 + 4m)$ y $(2m + 4, m + 5)$ forman una base de $(\mathbb{Z}_7)^2$.
9. Calcula una base del espacio
$$U = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3),\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} M = M \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\}.$$
10. Halla la dimensión y una base del subespacio de $(\mathbb{Z}_3)^4$ generado por los vectores $(0, 1, 0, 0)$, $(2, 0, 0, 1)$, $(1, 2, 0, 2)$, $(0, 2, 0, 2)$. Calcula las ecuaciones de ese subespacio.
11. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios:
$$U = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\ a + d = b = 0\} \qquad \text{y} \qquad V = \{A;\ A + A^t = 0\}$$
Halla la dimensión y una base de U, V y $U \cap V$.
12. Sea $V = P_3(\mathbb{R})$ y sean U_1, U_2 y U_3 los subconjuntos de V definidos por:
$$U_1 = \{p(x) \in V,\ p(0) = 0\},\ U_2 = \{p(x) \in V,\ p(1) = 0\} \text{ y } U_3 = \{p(x) \in V,\ xp'(x) = p(x)\},$$
donde $p'(x)$ es el polinomio derivada de $p(x)$.
   (a) Demuestra que U_1, U_2 y U_3 son un subespacios vectoriales de V.
   (b) Halla una base y la dimensin de U_1, U_2, U_3, $U_1 \cap U_2$, $U_1 \cap U_3$ y $U_2 \cap U_3$.

13. Sea $V = \{p(x) \in \mathbb{Z}_3[x],\ \text{grado}(p(x)) \leq 2\}$ y sean $1 - x + ax^2$, $1 + 2x + x^2$, $x^2 + b$ en V :

(a) Halla $a, b \in \mathbb{Z}_3$ para que los tres vectores sean linealmente independientes.

(b) Halla $a, b \in \mathbb{Z}_3$ para que el subespacio que generan tenga dimensión 1.

(c) Para $b = 2$, halla una base y las ecuaciones del subespacio generado por ellos.

14. Halla el rango de las matrices reales siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

15. Estudia si las matrices reales siguientes son equivalentes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

16. Calcula el rango de A según los valores de a y b ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

17. Estudia la existencia de soluciones del sistema siguiente en función de los valores de a y b ($a, b \in \mathbb{R}$). Halla las soluciones cuando existan.

$$i) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & 1 \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array} \right. \qquad ii) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} ax & & & + & 2z & = & 2 \\ 5x & + & 2y & & & = & 1 \\ x & - & 2y & + & bz & = & 3 \end{array} \right.$$

18. Halla los valores de a y b para que el conjunto de soluciones del siguiente sistema sea un subespacio vectorial de dimensión 2 en $\mathbb{R}^4$.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & - & az & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & b \end{array} \right.$$

19. (a) Sea $AX = b$ un sistema de 20 ecuaciones lineales con 24 incógnitas de modo que el subespacio de soluciones de $AX = 0$ está generado por 4 vectores linealmente independientes, ¿el sistema $AX = b$ es compatible para cualquier b?

(b) Sea $AX = 0$ un sistema de ecuaciones lineales con 20 incógnitas cuyo subespacio de soluciones está generado por 6 vectores linealmente independientes. ¿Cuál es el rango de A?

20. Demuestra que $B = \{(1, -1, 0), (1, 2, 1), (0, 1, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

(a) Halla $[u]_B$ si $[u]_{C_3} = (-2, 5, 3)$.

(b) Calcula las matrices de cambio de base M_{BC_3} y M_{C_3B}. Halla el producto de las matrices obtenidas.

(c) Resuelve el apartado a) utilizando una de las matrices anteriores.

21. Sean $B = \{(1, 1, 0), (0, 2, 6), (1, 0, 3)\}$ y $B' = \{(1, 0, 6), (2, 3, 4), (3, 3, 0)\}$ bases de $(\mathbb{Z}_7)^3$.

(a) Halla las matrices de cambio de base de $M_{BB'}$ y $M_{B'B}$. Halla el producto de estas matrices.

(b) Halla las coordenadas $[u]_B$ y $[u]_{B'}$ si $[u]_{C_3} = (1, 2, 5)$.

(c) Calcula $[v]_{B'}$ si $[v]_B = (1, 2, 5)$.