Álgebra, curso 2007–2008

Ejercicios del Tema 5. Aplicaciones lineales.

1. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación $f(x, y, z, t) = (x - y + z + 4t, x - y + 6t, z - 2t, x - y + 6t)$. Halla una base y las ecuaciones de $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$. Completa la base de $\operatorname{Ker} f$ a una base de $\mathbb{R}^4$.

2. Halla la matriz $\mathrm{M}_{BB}(f)$, asociada al endomorfismo $f : (\mathbb{Z}_{11})^3 \to (\mathbb{Z}_{11})^3$ determinado por

$$f(\vec{v_1}) = \vec{v_1} + \vec{v_3}, f(\vec{v_2}) = 2\vec{v_1} + 10\vec{v_2}, \quad \operatorname{Ker} f = < \vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3} >,$$

   siendo $B = \{\vec{v_1}; \vec{v_2}; \vec{v_3}\}$ una base de $(\mathbb{Z}_{11})^3$. Calcula $f^{-1}(8\vec{v_1} + 8\vec{v_2} + 2\vec{v_3})$ y una base y las ecuaciones de $Im\, f$ en función de B.

3. Define, cuando sea posible, las aplicaciones siguientes:

   (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\operatorname{Ker} f = < (1, 1, 1) >$ y $(0, 2) \in \operatorname{Im} f$,

   (b) $g : (\mathbb{Z}_3)^3 \to (\mathbb{Z}_3)^2$ tal que $\operatorname{Ker} g = \{(0, 0, 0)\}$,

   (c) $h : (\mathbb{Z}_7)^3 \to (\mathbb{Z}_7)^3$ tal que $\operatorname{Ker} h = \{(0, 0, 0)\}$ y $(0, 2, 1) \in \operatorname{Im} h$,

   (d) $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ tal que $\operatorname{Ker} f = < (1, 4, 2), (1, 4, 3) >$ y $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x - y + z, 0)$.

   (a) Halla las ecuaciones y una base de los subespacios $\operatorname{Ker} f$ y $\operatorname{Im} f$.

   (b) ¿Es f inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

   (c) Halla la matriz asociada a f respecto a las respectivas bases canónicas.

   (d) ¿Cuál es el rango de la matriz anterior? (debes saber cuál es sin calcularlo).

5. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada es

$$\mathrm{M}_{C_4C_3}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -3 & b \\ 1 & a & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Halla $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $(1, 0, 0, 1) \in \operatorname{Ker} f$ y f es sobreyectiva.

   (b) Para $a = b = 0$, halla $f(-1, 2, 1, 0)$ y $f^{-1}(\{(0, 1, 0)\})$.

   (c) Sea $B = \{(1, 0, 1), (-1, 0, 2), (0, 1, 0)\}$. Calcula la matriz $\mathrm{M}_{C_4B}(f)$ en el caso $a = b = 0$.

6. Sea $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $f(A) = (a_{11} + a_{22}, a_{12} - a_{21})$.

   (a) Halla la matriz asociada a f respecto a las bases canónicas de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Halla bases de $\operatorname{Im} f$ y $\operatorname{Ker} f$.

   (c) ¿Es f sobreyectiva? ¿Es inyectiva?

7. Sean $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que

$$f(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 0),\ f(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1) \text{ y } \operatorname{Ker} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z = 0, z + t = 0\}.$$

   (a) Halla la matriz de f respecto a las bases canónicas.

   (b) Calcula la dimensión, una base y las ecuaciones de $\operatorname{Im} f$.

   (c) Halla el conjunto $f^{-1}(\{(1, 0, 2)\})$.

   (d) Si $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x = y\}$, da un sistema de generadores de la imagen de W, $f(W)$.

8. Sean $p \in \mathbb{N}$ tal que $1 < p < 10$, y $f : (\mathbb{Z}_p)^3 \to (\mathbb{Z}_p)^3$ una aplicación entre espacios vectoriales tal que $f(1,0,1) = (2,5,4)$, $f(1,5,1) = (1,1,0)$ y $f(0,0,2) = (-2,1,2)$.
   (a) ¿Para qué valores de p, estos datos determinan una aplicación lineal?
   (b) ¿Para qué valores de p es f un isomorfismo?
9. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $\mathrm{Ker} f =< (1,4,2) >$ e $\mathrm{Im}\, f =< (0,1,0), (0,1,1) >$.
   (a) Calcula la matriz $\mathcal{M}_{C_3C_3}(f)$.
   (b) Halla $f(x,y,z)$
   (c) Halla $f^{-1}(\{(1,3,4)\})$
   (d) Calcula la matriz $\mathcal{M}_{BB}(f)$, siendo $B = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$.
   (e) ¿Es f un isomorfismo?
10. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $f(0,0,1) = (1,2,3), (0,2,1) \in \mathrm{Ker} f$ y $f \circ f = 0$.
   (a) Halla la matriz de f respecto a las bases canónicas.
   (b) Demuestra que la aplicación $id - f$ es un isomorfismo, siendo id la aplicación identidad.
11. Dadas las aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $f(x,y,z) = (x+y, y, z)$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $g(x,y,z) = (y, x, z-y)$, y las bases $B_1 = \{(1,1,0), (2,0,3), (-1,1,2)\}$, C_3 la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $B_2 = \{(1,1,-1), (1,-1,1), (0,1,2)\}$. Halla la matriz $\mathcal{M}_{B_1B_2}(f \circ g)$ y comprueba que coincide con el producto de las matrices asociadas a f y a g, tomando como base intermedia C_3.
12. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada es

$$\mathrm{M}_{C_3C_3}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -a \\ 2 & 6 & -2a \\ 1 & 3 & 1+a \end{pmatrix}$$

   Calcula los valores de $a \in R$, para los cuales f es un isomorfismo: Halla la aplicación $f^{-1} \circ f^{-1}$ para el caso $a = 0$.
13. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal definida por: $f(1,0,1) = a + bx$, $f(0,1,-1) = ax + bx^2$, $f(0,0,1) = b + ax$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$.
   (a) Halla la matriz asociada a f respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y de $P_2(\mathbb{R})$.
   (b) ¿Para qué valores de a y b la aplicación f es un isomorfismo?
   (c) Suponiendo que $b = 0$, halla bases y dimensión de los subespacios $\mathrm{Ker} f$ e $\mathrm{Im}\, f$.
   (d) Tomando a y b de modo que f sea un isomorfismo, halla una base y las ecuaciones de $f(U)$, para $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + z = y + z = 0\}$.
14. Sea $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base cualquiera de $(\mathbb{Z}_5)^3$ y sea $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ la aplicación lineal definida por: $f(\vec{v}_1) = (4,1,0)$, $f(\vec{v}_2) = (1,3,4)$ y $f(\vec{v}_3) = (2a, b, 0)$. Calcula una relación entre $a, b \in \mathbb{Z}_5$ para la cual $\mathrm{d}im\, \mathrm{Ker}\, f = 1$.
15. Sea $C_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que
   $f(e_1) = e_1 + \lambda e_2 + e_3$, $f(e_2) = 2\lambda e_1 + e_2 + e_3$ y $f(e_3) = 3e_1 + 5\lambda e_2 + 5e_3$.
   Halla el valor de λ para que la dimensión de $\mathrm{Ker}\, f$ sea máxima. Para ese valor de λ,
   (a) halla las ecuaciones, bases y dimensión de los subespacios $\mathrm{Ker}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$. ¿Es f un isomorfismo? ¿por qué?
   (b) Dada la base $B = \{(0,1,1), (1,0,1), (1,1,1)\}$, halla $\mathrm{M}_{BB}(f)$. ¿Cómo se podría calcular esta matriz a través de matrices de cambio de base?
16. Sean $C_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal definida por

$$f(\vec{e_1}) = 2\vec{v_1},\ f(\vec{e_2}) = \vec{e_1} + \vec{e_2} + a\vec{e_3},\ f(\vec{e_2}) = \vec{e_1} + b\vec{e_2} + a\vec{v_3}.$$

   (a) Calcula los valores de a y de b para los que f no es inyectiva.
   (b) Para el valor de a obtenido en el apartado anterior, calcula, en funión de b, la dimensión, una base y las ecuaciones de $\mathrm{Im}\, f$ y $\mathrm{Ker}\, f$.