ÁLGEBRA - EXAMEN JUNIO 2007

Ejercicio 1.-

Defínase orden de un elemento de un grupo finito. En el grupo $(\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_6, +)$, ¿es $66 = orden(9,2)$?.

Solución.-

Se define el orden de un elemento g de un grupo finito $(G, *)$ como el menor entero positivo m tal que $g^m = e$, con e elemento neutro.

Por otra parte:

$$orden(9,2)_{\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_6} = m.c.m.\{orden(9)_{\mathbb{Z}_{11}}, orden(2)_{\mathbb{Z}_6}\} = m.c.m.\{(11,3)\} = 33\,.$$

Luego $\boxed{orden(9,2) = 33}$

Ejercicio 2.-

Sean $(G,+)$ un grupo conmutativo y $* : G \times G \longrightarrow G$ la operación definida para cada $g, g' \in G$ por $g * g' = g'$. ¿Es $(G,+,*)$ un anillo?.

Solución.-

No es un anillo ya que $*$ no es distributiva respecto $+$.

En efecto, por un lado, sí se verifica que $g * (g' + g'') = g * g' + g * g''$; en efecto:

$$g * (g' + g'') = g' + g'' \qquad\qquad (g * g') + (g * g'') = g' + g''\,.$$

Sin embargo no se verifica que $(g + g') * g'' = g * g'' + g' * g''$:

$$(g + g') * g'' = g'' \qquad\qquad g * g'' + g' * g'' = g'' + g''\,.$$

Por lo tanto $\boxed{(G,+,*) \text{ no es un anillo}}$

Ejercicio 3.-

En el anillo $\dfrac{\mathbb{Z}_5[x]}{(2 + 3x + 2x^3)}$, calcúlese el inverso de $[1 + 3x^2]$.

Solución.-

Haciendo las divisiones de polinomios, se obtiene que

a) $\dfrac{2x^3 + 3x + 2}{3x^2 + 1}$ da como cociente $4x$ y como resto $4x + 2$.

b) $\dfrac{3x^2+1}{4x+2}$ da como cociente $2x+4$ y como resto 3.

c) $\dfrac{4x+2}{3}$ da como cociente $3x+4$ y como resto 0.

Así:

$$2x^3+3x+2 = 4x\cdot(3x^2+1)+4x+2 \qquad 3x^2+1=(2x+4)\cdot(4x+2)+3 \qquad 4x+2=(3x+4)\cdot 3\,.$$

Luego:

$$\begin{aligned} 3 &= (3x^2+1)-(4x+2)\cdot(2x+4) = (3x^2+1)-\left[2x^3+3x+2-(3x^2+1)\cdot 4x\right]\cdot(2x+4) = \\ &= 3x^2+1-(2x^3+3x+2)\cdot(2x+4)+(3x^2+1)\cdot 4x\cdot(2x+4) = \\ &= (3x^2+1)\cdot[1+4x\cdot(2x+4)]+(2x^3+3x+2)\cdot(-2x-4) = (3x^2+1)\cdot(1+x+3x^2) \end{aligned}$$

En consecuencia $1=(3x^2+1)\cdot(2+2x+x^2)$, por lo que $\boxed{(3x^2+1)^{-1}=x^2+2x+2}$

Ejercicio 4.-

Sea $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ una matriz no cuadrada tal que $A^t\cdot A$ es una matriz inversible. Justifíquese que $B=A\cdot(A^t\cdot A)^{-1}\cdot A^t$ es idempotente.

Solución.-

$$B\cdot B = A\cdot(A^t\cdot A)^{-1}\cdot A^t\cdot A\cdot(A^t\cdot A)^{-1}\cdot A^t = A\cdot(A^t\cdot A)^{-1}\cdot A^t = B\,.$$

Ejercicio 5.-

Se consideran U un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_7$ y $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ una base de U. Calcúlese a para que $S=\{av_1+v_2+v_3, v_1+av_2+v_3, v_1+v_2+av_3\}$ sea un conjunto libre en U.

Solución.-

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3-3a+2\neq 0 \Leftrightarrow_{Z_7} \quad a\neq 1,\ \ a\neq 5\,.$$

Por lo tanto $\boxed{a\neq 1, \quad a\neq 5}$

Ejercicio 6.-

Sean $B=\{\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}$ y $B'=\{\bar v_1,\bar v_2,\bar v_3,\bar v_4\}$ bases de $(\mathbb{Z}_3)^3$ y $(\mathbb{Z}_3)^4$ respectivamente. Calcúlese $m_{BB'}(f)$ siendo $f:(\mathbb{Z}_3)^3\longrightarrow(\mathbb{Z}_3)^4$ el morfismo tal que $f(\bar e_1+2\bar e_2)=2\bar v_1$, $f(2\bar e_2+\bar e_3)=\bar v_2+2\bar v_4$ y $f(2\bar e_3)=\bar v_1+\bar v_2$.

Solución.-

$2f(\bar{e}_3) = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \Rightarrow f(\bar{e}_3) = 2^{-1}(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) \Rightarrow f(\bar{e}_3) = 2\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2$.

$f(2\bar{e}_2 + \bar{e}_3) = 2f(\bar{e}_2) + f(\bar{e}_3) = \bar{v}_2 + 2\bar{v}_4 \Rightarrow f(\bar{e}_2) = 2^{-1}(-2\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_4 \Rightarrow f(\bar{e}_2) = 2\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_4$.

$f(\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2) = f(\bar{e}_1) + 2f(\bar{e}_2) = 2\bar{v}_1 \Rightarrow f(\bar{e}_1) = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_4$.

Así $\boxed{m_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

Ejercicio 7.-

Sean $U =< (0,1,2,2), (2,0,1,2) >\subseteq \mathbb{R}^4$ un subespacio y $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal cuya matriz asociada en las bases canónicas es $m_{C_4C_3}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcúlense las ecuaciones, una base y la dimensión de $f(U)$.

Solución.-

$$\begin{aligned} f(U) &= < f(0,1,2,2), f(2,0,1,2) >= \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= < (2,4,2), (5,5,3) > . \end{aligned}$$

Luego $\boxed{B_{f(U)} = \{(2,4,2), (5,5,3)\}}$ y $\boxed{dim(f(U)) = 2}$

$$(x,y,z) = \alpha(2,4,2) + \beta(5,5,3) \Rightarrow \begin{cases} x = 2\alpha + 5\beta \\ y = 4\alpha + 5\beta \\ z = 2\alpha + 3\beta \end{cases}$$

Eliminando α y β resulta $\boxed{x + 2y - 5z = 0}$

Ejercicio 8.-

Sean V y W dos espacios vectoriales y $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal tal que toda base B de V cumple que $f(B)$ es una base de $f(V)$. Pruébese que f es inyectiva.

Solución.-

Se verifica que f es inyectiva si y sólo si $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$.

Si $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ es una base de V, se tiene:

$$v_1 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n \qquad\qquad v_2 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n$$

$$
\begin{aligned}
f(v_1)=f(v_2) \quad &\Rightarrow \quad f(v_1=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_nu_n)=f(\beta_1u_1+\beta_2u_2+\ldots+\beta_nu_n)\Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad \alpha_1f(u_1)+\alpha_2f(u_2)+\ldots+\alpha_nf(u_n)=\beta_1f(u_1)+\beta_2f(u_2)+\ldots+\beta_nf(u_n)\Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad (\alpha_1-\beta_1)f(u_1)+(\alpha_2-\beta_2)f(u_2)+\ldots+(\alpha_n-\beta_n)f(u_n)=0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{f(B)\ \text{base}} \\
&\Rightarrow \quad \alpha_1-\beta_1=0,\quad \alpha_2-\beta_2=0,\quad \ldots\quad ,\alpha_n-\beta_n=0\Rightarrow v_1=v_2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto queda demostrado que f es inyectiva.

Ejercicio 9.-

Sean V un K-espacio vectorial de dimensión finita y $f:V\longrightarrow V$ una aplicación lineal tal que $f^6=f\circ\ldots^6\circ f=0$. ¿Es f un isomorfismo?.

Solución.-

Se va a ver que f no es isomorfismo demostrando que no es inyectiva. Se hará por reducción al absurdo: se supone que f sí es inyectiva y se llega a una contradicción.

Si f inyectiva entonces f^6 es inyectiva, por lo que $dim(Ker(f^6))=0$.

Pero por otra parte, como $f^6=0$, $dim(Ker(f^6))=dimV$.

Se llegaría a que $dim(V)=0$, lo cual es absurdo.