EXAMEN DE ÁLGEBRA – JUNIO 2008

Ejercicio 1:

a) Define propiedad simplificable para un elemento a de un anillo (A, +, .).

b) Si $a \in A$ es simplificable y $a^5 + (-a) = 0$ demostrar que a^2 es una unidad.

a) El elemento a es simplificable por la izquierda si dado a.b =a.c tenemos que b=c.
El elemento a es simplificable por la derecha si dado b.a = c.a tenemos que b=c.
El elemento a es simplificable si lo es por la izquierda y por la derecha.

b) $a^5 + (-a) = 0 \Rightarrow a^5 = a \Rightarrow a.a^4 = a.1 \Rightarrow a^4 = 1 \Rightarrow a^2.a^2 = 1 \Rightarrow a^2$ es una unidad

Ejercicio 2:

a) Define morfismo de anillos

b) Demuestra que si a es una unidad, f(a) también lo es.

a) *Sean* (A, +, .) y (B, $*$, $\circ$) dos anillos y f:A $\rightarrow$ B una aplicación. Decimos que f es un morfismo de anillos si

$f(a+b)=f(a) * f(b)$

$f(a.b)=f(a) \circ f(b)$

$\forall a,b \in A$

b) a unidad $\Rightarrow \exists b \in A / a.b = b.a = 1$

si $a.b=b.a=1 \Rightarrow f(a.b)=f(b.a)=f(1) \Rightarrow f(a) \circ f(b)=f(b) \circ f(a)=1 \Rightarrow f(a)$ es unidad

Ejercicio 3:

a) Dado , $\dfrac{Z_5[x]}{(x^3+x^2+3x+1)}$ ¿es un cuerpo?.

b) ¿Es (x^2+x+1) divisor de cero en $\dfrac{Z_5[x]}{(x^3+x^2+3x+1)}$?.

a)

$\dfrac{Z_5[x]}{(x^3+x^2+3x+1)}$ es un cuerpo $\Leftrightarrow$ $p(x)=x^3+x^2+3x+1$ es irreducible en $Z_5[x]$

$como\ grado(p(x)) = 3$

$\Leftrightarrow$ $p(x)$ no tiene raíces en Z_5

$p(0) = 1$

$p(1) = 1$

$p(2) = 4$

$p(3) = 1$

$p(4) = 3$

Por tanto es un cuerpo

b) En un cuerpo no hay divisores de cero propios

Ejercicio 4:

Hallar la inversa de la matriz A en Z_7

$$A = \begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&1&1&2 \\ 2&3&1&5 \\ 4&2&3&6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&1&0&0&0 \\ 1&1&1&2&0&1&0&0 \\ 2&3&1&5&0&0&1&0 \\ 4&2&3&6&0&0&0&1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1&2&3&4&1&0&0&0 \\ 0&6&5&5&6&1&0&0 \\ 0&6&2&4&5&0&1&0 \\ 0&1&5&4&3&0&0&1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1&2&3&4&1&0&0&0 \\ 0&6&5&5&6&1&0&0 \\ 0&0&4&6&6&6&1&0 \\ 0&0&3&2&2&1&0&1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1&2&3&4&1&0&0&0 \\ 0&6&5&5&6&1&0&0 \\ 0&0&4&6&6&6&1&0 \\ 0&0&0&1&1&0&1&1 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1&2&3&0&4&0&3&3 \\ 0&6&5&0&1&1&2&2 \\ 0&0&4&0&0&6&2&1 \\ 0&0&0&1&1&0&1&1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4&1&0&0&2&3&6&2 \\ 0&3&0&0&4&2&5&3 \\ 0&0&4&0&0&6&2&1 \\ 0&0&0&1&1&0&1&1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5&0&0&0&2&0&6&3 \\ 0&3&0&0&4&2&5&3 \\ 0&0&4&0&0&6&2&1 \\ 0&0&0&1&1&0&1&1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1&0&0&0&6&0&4&2 \\ 0&1&0&0&6&3&4&1 \\ 0&0&1&0&0&5&4&2 \\ 0&0&0&1&1&0&1&1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5:

Decir si son iguales los siguientes subespacios vectoriales

$U = \left\langle 1+x^2, 2+x \right\rangle$ y $V = \left\langle 1+x+x^2, 1+x \right\rangle$

¿Pertenece a alguno de ellos $p(x) = 3+2x+3x^2$?

Para que U y V sean iguales tendrá que suceder que todo elemento de U sea de V y todo elemento de V sea de U

$1+x^2=(1,0,1)$

$1+x+x^2=(1,1,1)$

$1+x=(1,1,0)$

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&0\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow son \text{ l.i.} \Rightarrow 1+x^2 \text{ no puede escribirse como combinación lineal de}$$

$1+x+x^2$ y $1+x \Rightarrow U \neq V$

$p(x) \in U \Rightarrow p(x)=\alpha(1+x^2)+\beta(2+x)$

$$\left.\begin{array}{l}3=\alpha+2\beta\\2=\beta\\3=\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha=3\\\beta=2\end{array}\right\}\Rightarrow 3=3+2.2 \text{ imposible} \Rightarrow p(x)\notin U$$

$p(x)\in V \Rightarrow p(x)=\alpha(1+x+x^2)+\beta(1+x)$

$$\left.\begin{array}{l}3=\alpha+\beta\\2=\alpha+\beta\\3=\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=2\\\alpha+\beta=3\end{array}\right\}\text{imposible} \Rightarrow p(x)\notin V$$

Ejercicio 6:

Sea V un espacio vectorial con $\{e_1,e_2,e_3\}$ base de V. Sean

$v_1=e_1-e_2+2e_3$

$v_2=2e_1+e_2+e_3$

Encontrar v_3 para que $\{v_1,v_2,v_3\}$ sea base de V.

$v_1=(1,-1,2)$

$v_2=(2,1,1)$

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\1&-1&2\\2&1&1\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \text{son l.i.} \Rightarrow v_3=e_1$$

Ejercicio 7:

Comprobar si existe una aplicación lineal $f:(Z_{11})^4 \rightarrow (Z_{11})^4$ tal que

$\ker f=\langle(1,9,3,7),(2,5,4,10)\rangle$ e $\text{Imf}=\langle(6,7,10,9),(1,2,3,4),(6,7,8,9)\rangle$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 4 & 10 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 & 7 \\ 0 & 9 & 9 & 7 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow l.i.$$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 10 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 7 \\ 0 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow l.i.$$

$$\dim\left(Z_{11}\right)^4 = \dim\ker f + \dim imf$$

$$4 = 2 + 3 \text{ imposible}$$

Ejercicio 8:

Sea $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ una aplicación lineal tal que

$$M_{CC'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Hallar las ecuaciones cartesianas de imf

$$imf = \left\langle (1,3,2,1), (-1,1,2,0), (2,4,-5,3) \right\rangle$$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 3 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -9 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -14 & 3 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow l.i.$$

$$(x,y,z,t) = \alpha(1,3,2,1) + \beta(0,4,4,1) + \gamma(0,0,-14,3)$$

Resolviendo el sistema llegamos a 5x+9y-2z-28t=0

Aleph

Centro de Estudios Universitarios

C/Ramón y Cajal Nº 20 Entresuelo Izq.

La Coruña

981.13.05.19