Capítulo 5

Determinantes

A cada matriz cuadrada A con coeficientes en K, le asociaremos un elemento de K llamado determinante de A. Este elemento nos servirá para caracterizar a las matrices inversibles y para resolver sistemas $A \cdot X = B$, en los que A es inversible. Daremos una definición recursiva de determinante de una matriz.

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ una matriz cuadrada con coeficientes en K.

Si $n = 1$, $det(A) = a_{11}$.

Si $n = 2$, $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Para $n \geq 3$, suponemos definidos los determinantes de cualquier matriz de orden $n-1$ y definimos:

$$det(A) := a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}. \tag{5.1}$$

donde, para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se define $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, siendo Δ_{ij} el determinante de la submatriz de orden $n-1$ que resulta de suprimir en A la fila i-ésima y la columna j-ésima.

La expresión 5.1 se denomina desarrollo de Laplace del determinante por los elementos de la fila i-ésima.

La definición anterior no depende de la fila i que escojamos en la matriz, es decir:

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \ldots + a_{jn}A_{jn}, \quad \forall i \neq j.$$

El desarrollo del determinante también puede efectuarse sobre los elementos de una columna:

$$det(A) := a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}. \tag{5.2}$$

La expresión 5.2 se denomina desarrollo de Laplace del determinante por los elementos de la columna j-ésima y no depende de la columna que escojamos en A.

Si quisiésemos calcular el determinante de una matriz A de orden tres desarrollándolo por la primera fila, nos queda:

$$\begin{aligned} det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

(Esta fórmula se conoce con el nombre de regla de Sarrus).

Proposición 5.0.1 *Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$.*

1. $det(A) = det(A^t)$.
2. *Si la matriz A tiene una fila (o columna) donde todos los coeficientes valen cero, su determinante vale cero.*
3. *Si A es una matriz triangular (superior o inferior), entonces $det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$*

4. *Si A es una matriz diagonal, entonces $det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$*

Demostración. La prueba de 1 es inmediata. Para justificar 2 basta desarrollar el determinante por los elementos de esa fila o columna. La afirmación 3 se demuestra por inducción en n, desarrollando el determinante por los elementos de la primera columna (si A es triangular superior) o de la primera fila si A es triangular inferior. Finalmente, como consecuencia se deduce 4.

5.1 Determinantes y operaciones elementales

En el tema anterior aprendimos a transformar una matriz cuadrada A en una triangular T realizando operaciones elementales en sus filas. Puesto que sabemos que $det(T) = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}$, sera conveniente saber cómo le afecta cada operación elemental en las filas de A al cálculo del determinante.

Proposición 5.1.1 *Sean A y B dos matrices cuadradas. Se verifica:*

$$det(A \cdot B) = det(A)det(B)$$

Proposición 5.1.2 *Sea A una matriz cuadrada. Se verifica:*

1. *Si en A intercambiamos entre si dos filas (o dos columnas), obtenemos una matriz A' cuyo determinante es el opuesto del determinante de A.*

2. *Si en A multiplicamos los elementos de una fila (o columna) por un escalar λ, obtenemos una matriz A' cuyo determinante es el determinante de A multiplicado por λ.*

3. *Si en A le sumamos a los elementos de una fila F_i (o columna) los de otra fila F_j $(j \neq i)$ (o columna) multiplicados por $\lambda \in K$, obtenemos una matriz A' cuyo determinante es el de A.*

4. *Si una matriz A tiene dos filas (o columnas) iguales, su determinante vale cero.*

5. *Si en la fila i de una matriz A cada elemento $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ es suma de dos, entonces*

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{ij}+c_{ij} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$
$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Demostración. Para las tres primeras, basta tener en cuenta 5.1.1 y el valor del determinante de las matrices elementales:

$$det(E_{ij}) = -1\ ;\ det(E_i(\lambda)) = \lambda\ ;\ det(E_{i+\lambda j}) = 1.$$

Si una matriz A tiene dos filas iguales $(F_i = F_j)$ y, en ella, hacemos $F_i - F_j$ obtenemos una matriz A' con el mismo determinante que A y con una fila de ceros, así que $det(A) = 0$.

Para demostrar la última propiedad, basta desarrollar el determinante por la fila i-ésima.

5.1.3 *Si una fila F_i (o columna) es una suma de mútiplos de otras filas (o columnas), es decir, $F_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j F_j$, su determinante es cero.*

5.2 Determinante y matriz inversa

Veremos cómo el determinante de una matriz nos permite saber cuándo dicha matriz es inversible.

Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ una matriz cuadrada. La *matriz adjunta* de A, $Adj(A)$, es una matriz cuyos coeficientes son los adjuntos $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ de los elementos de A.

Teorema 5.2.1 *Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$. La matriz A es inversible si, y sólo si, $det(A) \neq 0$. Además*

$$A^{-1} = det(A)^{-1} \cdot Adj(A)^t$$

Demostración. Si A es inversible, sabemos que

$$det(A) \cdot det(A^{-1}) = det(I_n) = 1,$$

por lo que, necesariamente $det(A) \neq 0$ y $det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$.

Supongamos ahora que el determinante de A no es cero y demostremos que

$$C = A \cdot Adj(A)^t = det(A) \cdot I_n.$$

Recordemos que en la posición (k, i) la matriz $Adj(A)^t$ tiene el coeficiente (i, k) de $Adj(A)$ y coincide con el adjunto A_{ik} de A.

Para cada i, se tiene que:

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = det(A)$$

Si, tomamos $i \neq j$, entonces:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk} = 0,$$

puesto que se trata del determinante de la siguiente matriz, que tiene dos filas iguales

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Observación 5.2.2 *Con el resultado anterior ya podemos garantizar que si B es una matriz cuadrada de orden n tal que $AB = I_n$ o $BA = I_n$, entonces, necesariamente A es inversible, siendo precisamente B la inversa de A.*

En efecto, si $A \cdot B = I_n$ entonces det(A)$\cdot$ det (B)=det(I_n)=1, asi $det(A) \neq 0$ y, por tanto, es inversible. Entonces,

$$B = (A^{-1} \cdot A) \cdot B = A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} I_n = A^{-1}.$$

5.3 Regla de Cramer

Sea A una matriz cuadrada de orden n y sea $A \cdot X = B$ un s.e.l. con matriz asociada A. Si $det(A) \neq 0$, entonces el sistema es compatible determinado y la solución única es:

$$X = A^{-1} \cdot B = det(A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1i} & \cdots & A_{ni} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Observemos que

$$(b_1 \cdot A_{1i} + b_2 \cdot A_{2i} + \cdots + b_n \cdot A_{ni}) = det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

con lo cual, para cada índice $i = 1, \ldots, n$ tenemos

$$x_i = (det(A))^{-1} \cdot det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 5.3.1 *Resuelve por Cramer y por Gauss el siguiente sistema en $\mathbb{Z}_7$:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 6y & + & 4z & = & 3 \\ 4x & + & 5y & + & 3z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & 5z & = & 5 \end{array}$$

Empecemos resolviéndolo por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \sim_{F_2+3F_1, F_3-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{array}\right) \sim_{4F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{array}\right) \sim_{F_3-3F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim_{6F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim_{F_1+3F_3, F_2+3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim_{F_1+F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Para resolverlo por Cramer, empezamos calculando el determinante de A.

$$det \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 25 + 36 + 16 - 40 - 3 - 120 = 5.$$

Entonces, la solución viene dada por:

$$x = 5^{-1} \cdot det \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 = 5.$$

$$y = 5^{-1} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot 3 = 2.$$

$$z = 5^{-1} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot 0 = 0.$$