

Capítulo 7

Aplicaciones Lineales

7.1 Definición y Propiedades

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K .

Definición 7.1.1 *Se dice que una aplicación $f : V \rightarrow W$ es una aplicación lineal o un homomorfismo de espacios vectoriales si verifica:*

- $f(\vec{v} + \vec{v}') = f(\vec{v}) + f(\vec{v}')$
- $f(\alpha\vec{v}) = \alpha f(\vec{v})$

para cualquier par de vectores $\vec{v}, \vec{v}' \in V$ y cualquier $\alpha \in K$. Las dos condiciones anteriores se pueden substituir por la condición única:

$$f(\alpha\vec{v} + \beta\vec{v}') = \alpha f(\vec{v}) + \beta f(\vec{v}')$$

siendo $\vec{v}, \vec{v}' \in V$ y $\alpha, \beta \in K$.

Ejemplo 7.1.2 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación definida por $f(x, y) = x$. Es claramente una aplicación lineal.

2. También es lineal la aplicación $f : V \rightarrow V$ definida por $f(\vec{v}) = \alpha\vec{v}$, siendo $\alpha \in K$ cualquier escalar.
3. Generalizando el primer ejemplo se tiene que para m, n cualquier par de números naturales y $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ cualquier matriz con coeficientes en K , la aplicación $f_A : K^n \rightarrow K^m$, definida por

$$f_A(x_1, \dots, x_n) = A(x_1, \dots, x_n)^t$$

es lineal. Además, cualquier aplicación lineal entre estos dos espacios vectoriales viene definida de esta manera.

4. Sea $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el conjunto formado por las funciones derivables. La aplicación

$$\phi : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}},$$

definida por $\phi(f) = f'$ que asocia a cada función f su derivada es lineal.

5. Igual que en el ejemplo anterior, son aplicaciones lineales

$$\phi : K[x] \rightarrow K[x], \text{ y } \phi|_{\mathcal{P}_n(K)} : \mathcal{P}_n(K) \rightarrow \mathcal{P}_{n-1}(K),$$

que asocian a cada polinomio $p(x)$ de grado menor o igual que n su derivada $p'(x)$ de grado menor o igual que $n - 1$.

Veámos algunas propiedades que se deducen de la definición:

1. Como f es un morfismo de grupos entre $(V, +)$ y $(W, +)$, se tiene que $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ y $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$
2. Si $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ es un conjunto de vectores de V y $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ son escalares de K ,

$$f\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^p \alpha_i f(\vec{v}_i)$$

3. Si $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \subset V$ es un conjunto ligado entonces $\{f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_p)\}$ es un subconjunto de W formado por vectores linealmente dependientes.

Sin embargo, vectores linealmente independientes no se transforman, necesariamente, en vectores linealmente independientes. Basta tomar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(x, y) = (x + y, 0)$ y el vector $(1, -1)$ cuya imagen es $(0, 0)$.

4. Si U, V y W son tres espacios vectoriales sobre K y $f : U \rightarrow V$ y $g : V \rightarrow W$ son dos aplicaciones lineales, la composición $g \circ f : U \rightarrow W$ también es lineal.

Una aplicación lineal f inyectiva se llama *monomorfismo*. Si f es sobreyectiva, se dice que es un *epimorfismo* y, finalmente si es biyectiva, diremos que f es un *isomorfismo*. Un *automorfismo* de V es un isomorfismo $f : V \rightarrow V$.

7.2 Núcleo e Imagen de una Aplicación Lineal

Proposición 7.2.1 Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal entre dos espacios de dimensión finita. Se verifica que:

1. Si $U \subseteq V$ es un subespacio vectorial de V , se tiene que $f(U)$ es un subespacio vectorial de W . Además si $U = \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p \rangle$, se tiene que $f(U) = \langle f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_p) \rangle$.

En particular $f(V) = \text{Im}(f)$ se llama subespacio imagen y a su dimensión se le llama rango de f , es decir, $\dim(\text{Im}(f)) = \text{rango}(f)$.

2. Análogamente si $W' \subseteq W$ es un subespacio vectorial de W , se tiene que $f^{-1}(W')$ es un subespacio vectorial de V . En particular, el subespacio $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{\vec{0}_W\})$ se llama núcleo de f .

Puesto que una aplicación lineal f también es un morfismo de grupos, se tiene que f es inyectiva si, y sólo si, $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}_V\}$.

Proposición 7.2.2 Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal. Son equivalentes:

1. f es inyectiva.
2. Si L es cualquier conjunto libre de V , entonces $f(L)$ es libre en W .
3. Si B es una base de V , entonces $f(B)$ es una base de $f(V)$.

Demostración. Supongamos que f es inyectiva y $L = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ es un conjunto libre. Si

$$\alpha_1 f(\vec{v}_1) + \dots + \alpha_p f(\vec{v}_p) = \vec{0}_W$$

con $\alpha_i \in K$, se tiene que $\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p \in \text{Ker}(f)$, así que $\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p = \vec{0}_V$ y como L es libre todos los escalares $\alpha_i = 0$.

Si B es una base de V , se tiene que $f(B)$ es un sistema de generadores de $f(V)$ y, al ser B libre se puede afirmar que $f(B)$ es una base de $f(V)$.

Finalmente supongamos la última hipótesis y tomemos $\vec{v} \in V$ un vector de V tal que $f(\vec{v}) = \vec{0}_W$. Si $\vec{v} \neq \vec{0}_V$, se puede encontrar B una base de V tal que $\vec{v} \in B$. Puesto que $f(\vec{v}) \in f(B)$ y $f(B)$ es una base de $f(V)$, llegamos a una contradicción ya que entonces $f(\vec{v}) \neq \vec{0}_W$.

Proposición 7.2.3 Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal. Se verifica que f es sobreyectiva si, y sólo si, f transforma cualquier sistema de generadores de V en un sistema de generadores de W .

Demostración. Sabemos que, si G es un sistema de generadores de V , entonces, para cualquier aplicación lineal f , se verifica que $f(V) = \langle f(G) \rangle$. Luego, f es sobreyectiva si, y sólo si, $W = \langle f(G) \rangle$, es decir, $f(G)$ es un sistema de generadores de W .

Teorema 7.2.4 (Teorema de la dimensión) Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal entre dos espacios de dimensión finita. Se verifica que:

$$\dim(V) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rango}(f)$$

Demostración. Supongamos que $\dim(V) = n$ y que $\dim(\text{Ker}(f)) = p \leq n$. Sea $L = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p\}$ una base de $\text{Ker}(f)$. Puesto que L es libre, el Teorema de Steinitz nos permite completar L a una base $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_n\}$ de V . Sabemos que

$$f(V) = \langle (f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_p), f(\vec{e}_{p+1}), \dots, f(\vec{e}_n)) \rangle = \langle (f(\vec{e}_{p+1}), \dots, f(\vec{e}_n)) \rangle$$

ya que los demás vectores pertenecen al núcleo de f . Si probamos que $\{f(\vec{e}_{p+1}), \dots, f(\vec{e}_n)\}$ es una base de $f(V)$, se tendría que $\dim(\text{Im}(f)) = \text{rango}(f) = n - p$. Puesto que ya sabemos que $\{f(\vec{e}_{p+1}), \dots, f(\vec{e}_n)\}$ son generadores de $f(V)$, únicamente quedaría por probar que son linealmente independientes. Sean pues $\alpha_i \in K$, con $i = p+1, \dots, n$ tales que:

$$\alpha_{p+1}f(\vec{e}_{p+1}) + \dots + \alpha_n f(\vec{e}_n) = \vec{0}_W.$$

Usando que f es lineal tenemos que $\alpha_{p+1}\vec{e}_{p+1} + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$ pertenece al núcleo de f . Como L es una base de $\text{Ker}(f)$, existen $\beta_1, \dots, \beta_p \in K$ de modo que:

$$\alpha_{p+1}\vec{e}_{p+1} + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \beta_1 \vec{e}_1 + \dots + \beta_p \vec{e}_p$$

o, lo que es lo mismo

$$\beta_1 \vec{e}_1 + \dots + \beta_p \vec{e}_p - \alpha_{p+1} \vec{e}_{p+1} - \dots - \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0}_V$$

pero al ser B libre concluimos que $\alpha_{p+1} = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_p = 0$.

Como consecuencia del teorema anterior, se tienen los siguientes corolarios.

Corolario 7.2.5 Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal entre dos espacios de dimensión finita. Se verifica que f es inyectiva si, y sólo si, $\dim(V) = \text{rango}(f)$.

Demostración. Basta tener en cuenta que f es inyectiva si, y sólo si, $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$ y aplicar el Teorema 7.2.4.

Corolario 7.2.6 Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal entre dos espacios de dimensión finita. Se verifica que f es sobreyectiva si, y sólo si, $\dim(V) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(W)$.

Demostración. Basta tener en cuenta que f es sobreyectiva si, y sólo si, $\dim(f(V)) = \dim(W)$ y aplicar el Teorema 7.2.4.

Corolario 7.2.7 Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal entre dos espacios de dimensión finita. Se verifica que f es biyectiva si, y sólo si, $\dim(V) = \text{rango}(f) = \dim(W)$.

Proposición 7.2.8 Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal entre dos espacios de dimensión finita. Se tiene que:

1. Si $\dim(V) = \dim(W)$, entonces

$$f \text{ es un isomorfismo} \Leftrightarrow f \text{ es un monomorfismo} \Leftrightarrow f \text{ es un epimorfismo.}$$

2. Si f es un isomorfismo, la aplicación inversa f^{-1} es también un isomorfismo.

3. Si $f : V \rightarrow W$ y $g : W \rightarrow U$ son isomorfismos, entonces $g \circ f : V \rightarrow U$ es un isomorfismo y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

7.3 Matrices y Aplicaciones Lineales

Es fácil comprobar que cualquier aplicación lineal entre dos espacios vectoriales V y W queda determinada por las imágenes de los vectores de una base de V . Si, por ejemplo, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal que verifica $f(1, 0) = (2, 1)$ y $f(0, 1) = (1, -1)$, es claro que

$$f(x, y) = xf(1, 0) + yf(0, 1) = (2x, x) + (y, -y) = (2x + y, x - y).$$

En un caso general, si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación lineal y $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ es una base de V , veamos como queda determinada f por $f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i \in W$, con $i = 1, \dots, n$. Supongamos que

$$M_B(\vec{v}) = (x_1, \dots, x_n)^t$$

son las coordenadas de \vec{v} respecto a B , se tiene que

$$f(\vec{v}) = f(x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n) = x_1f(\vec{e}_1) + \dots + x_nf(\vec{e}_n) = x_1\vec{w}_1 + \dots + x_n\vec{w}_n$$

Escribamos ahora cuáles son las coordenadas de cada $f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$ respecto a una base $B' = \{\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_m\}$ de W :

$$f(\vec{e}_i) = a_{1i}\vec{e}'_1 + \dots + a_{mi}\vec{e}'_m.$$

Podemos formar pues una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ cuya columna i -ésima está formada por las coordenadas de $f(\vec{e}_i)$ respecto a la base B' ($i = 1, \dots, n$). A esta matriz la denotaremos $M_{BB'}(f)$ y la llamaremos *matriz asociada a f respecto a las bases B y B'* . Esta matriz verifica que, dado cualquier vector $\vec{v} \in V$, si

$$M_B(\vec{v}) = (x_1, \dots, x_n)^t$$

son las coordenadas de dicho vector respecto a la base B y

$$M'_B(f(\vec{v})) = (y_1, \dots, y_m)^t$$

son las coordenadas de su imagen respecto a la base B' , se tiene que:

$$M'_B(f(\vec{v})) = M_{BB'}(f) \cdot M_B(\vec{v}).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} f(\vec{v}) &= x_1f(\vec{e}_1) + \dots + x_nf(\vec{e}_n) \\ &= x_1(a_{11}\vec{e}'_1 + a_{21}\vec{e}'_2 + \dots + a_{m1}\vec{e}'_m) \\ &+ x_2(a_{12}\vec{e}'_1 + a_{22}\vec{e}'_2 + \dots + a_{m2}\vec{e}'_m) \\ &\quad \vdots \\ &+ x_n(a_{1n}\vec{e}'_1 + a_{2n}\vec{e}'_2 + \dots + a_{mn}\vec{e}'_m) \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)\vec{e}'_1 \\ &+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n)\vec{e}'_2 \\ &\quad \vdots \\ &+ (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n)\vec{e}'_m \\ &= y_1\vec{e}'_1 + y_2\vec{e}'_2 + \dots + y_m\vec{e}'_m. \end{aligned}$$

Ejemplo 7.3.1 1. Si A es una matriz en $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$, la aplicación:

$$f_A : K^n \rightarrow K^m$$

tiene como matriz asociada respecto a las bases canónicas de K^n y K^m , respectivamente, a la matriz A , es decir:

$$M_{C_n C_m}(f_A) = A.$$

2. Si V es un espacio vectorial de dimensión n y B y B' son dos bases de V , se tiene que:

$$M_{BB'}(id_V) = M_{BB'}$$

Es inmediato comprobar que

Corolario 7.3.2 Si V y W son dos espacios vectoriales sobre K , se tiene que V y W son isomorfos si, y sólo si, $\dim(V) = \dim(W)$.

Demostración. Basta comprobar que si $\dim(V) = \dim(W) = n$ podemos tomar $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ y $B' = \{\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n\}$ bases de V y W respectivamente y definir la aplicación lineal f que asocia cada $f(\vec{e}_i) = \vec{e}'_i$, para cada $i = 1, \dots, n$. Puesto que $V = \langle B \rangle$ y $f(V) = \langle f(B) \rangle = \langle B' \rangle = W$, se tiene que f es un epimorfismo, y en consecuencia, un isomorfismo (ver Proposición 7.2.8).

Corolario 7.3.3 Sea $A = M_{BB'}(f)$ la matriz asociada a una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ respecto a un par de bases B y B' de V y W , respectivamente. Si $C \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ es otra matriz que verifica que, dado cualquier $\vec{v} \in V$,

$$M_{B'}(f(\vec{v})) = C \cdot M_B(\vec{v})$$

entonces $A = C$.

Demostración. Si $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, entonces, para cada $i = 1, \dots, n$, tenemos que:

$$C \cdot \vec{e}_i = C \cdot M_B(\vec{v}_i) = M_{B'}(f(\vec{v}_i)) = A \cdot M_B(\vec{v}_i) = A \cdot \vec{e}_i$$

siendo \vec{e}_i el i -ésimo vector a la base canónica de K^n , con lo que las columnas de A y C coinciden, es decir $A = C$.

Corolario 7.3.4 El K -espacio vectorial

$$\mathcal{L}(V, W) = \{f : V \rightarrow W ; f \text{ es una aplicación lineal}\}$$

es isomorfo a $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$ siendo $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$.

Demostración. Un isomorfismo

$$\varphi : \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathcal{M}_{m \times n}(K)$$

viene determinado por un par de bases B y B' de V y W respectivamente. Dada $f \in \mathcal{L}(V, W)$, se define:

$$\varphi(f) = M_{BB'}(f).$$

El Corolario 7.3.3 permite deducir que si $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\alpha \in K$, entonces:

$$M_{BB'}(f + g) = M_{BB'}(f) + M_{BB'}(g) \text{ y } M_{BB'}(\alpha f) = \alpha M_{BB'}(f).$$

Proposición 7.3.5 Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre K con $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$. Sean B y B' dos bases de V y W respectivamente y sea $A = M_{BB'}(f)$ la matriz asociada a f respecto a dichas bases. Se verifica que:

1. $\text{rango}(f) = \text{rango}(A)$
2. Si $m = n$ entonces, f es un isomorfismo si, y sólo si A es inversible.

Demostración. Si $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, sabemos que $f(V) = \langle (f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)) \rangle$ y, por lo tanto:

$$\text{rango}(f) = \dim(f(V)) = \text{rango} \{f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)\} = \text{rango}(A)$$

ya que las columnas de A son las coordenadas de cada vector $f(\vec{e}_i)$ respecto a la base B' .

Por otro lado, si $n = m$, sabemos que f es un isomorfismo si $n = \dim(V) = \dim(f(V)) = \text{rango}(f) = \text{rango}(A)$, lo que significa exactamente que A es inversible.

Ejemplo 7.3.6 Si $U \subseteq K^n$ es un subespacio vectorial de K^n , sabemos que

$$U = \{\vec{x} \in K^n ; A \cdot \vec{x} = \vec{0}\},$$

siendo A una matriz en $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$. Si aplicamos la fórmula de la dimensión a f_A , se tiene que:

$$n = \dim(K^n) = \dim(\text{Ker}(f_A)) + \text{rango}(f_A) = \dim(U) + \text{rango}(A)$$

siendo $\text{rango}(A)$ el número de ecuaciones linealmente independientes que definen al subespacio U .

7.3.1 Matrices Asociadas y Composición de aplicaciones

Teorema 7.3.7 Sean V , W y U tres K -espacios vectoriales de dimensiones n , m y p respectivamente y B_V , B_W y B_U bases de V , W y U respectivamente. Si $f : V \rightarrow W$ y $g : W \rightarrow U$ son aplicaciones lineales, la composición $g \circ f$ tiene como matriz asociada:

$$M_{B_U B_U}(g \circ f) = M_{B_W B_U}(g) \cdot M_{B_V B_W}(f)$$

Demostración. Sabemos que, para cualquier $\vec{v} \in V$ y $\vec{w} \in W$, se verifica que:

$$M_{B_W}(f(\vec{v})) = M_{B_V B_W}(f) \cdot M_{B_V}(\vec{v}) \quad \text{y} \quad M_{B_U}(g(\vec{w})) = M_{B_W B_U}(g) \cdot M_{B_W}(\vec{w})$$

Si ahora tenemos en cuenta 7.3.3 y que si $\vec{v} \in V$, se tiene que:

$$\begin{aligned} M_{B_W B_U}(g) \cdot M_{B_V B_W}(f) \cdot M_{B_V}(\vec{v}) &= M_{B_W B_U}(g) \cdot M_{B_W}(f(\vec{v})) \\ &= M_{B_W}(g(f(\vec{v}))) \\ &= M_{B_W}(g \circ f)(\vec{v}) \end{aligned}$$

se puede concluir que $M_{B_U B_U}(g \circ f) = M_{B_W B_U}(g) \cdot M_{B_V B_W}(f)$.

Ejemplo 7.3.8 Sean $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación lineal $f(x, y) = 2y - x$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por $g(t) = (3t, t, -t)$. De lo que hemos dicho se desprende que

$$M_{C_2 C_3}(g \circ f) = M_{C_3 C_3}(g) \cdot M_{C_2 C_2}(f) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

También podríamos haber calculado $g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = g(2y - x) = (6y - 3x, 2y - x, x - 2y)$$

y verificar que es la aplicación lineal que se corresponde con la matriz asociada (respecto a las bases canónicas) calculada anteriormente.

Corolario 7.3.9 Sea $f : V \rightarrow W$ un isomorfismo de espacios vectoriales ($\dim(V) = \dim(W) = n$) y sean B_V y B_W dos bases de V y W respectivamente. Sabemos que f^{-1} es un isomorfismo de espacios vectoriales y, además,

$$M_{B_W B_V}(f^{-1}) = M_{B_V B_W}(f)^{-1}$$

Demostración. Sólo hay que tener en cuenta que $Id_V = f^{-1} \circ f$ y que

$$I_n = M_{B_V B_V}(Id_V) = M_{B_W B_V}(f^{-1}) \cdot M_{B_V B_W}(f)$$

7.4 Matrices Asociadas y Cambio de Base

Veamos ahora la relación entre dos matrices asociadas a la misma aplicación lineal f respecto a distintas bases de los espacios vectoriales.

Sean $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre K con $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$ y B_V , B'_V bases de V y B_W , B'_W bases de W .

Teniendo en cuenta que $f = Id_W \circ f \circ Id_V$, podemos afirmar:

$$\begin{aligned} M_{B'_V B'_W}(f) &= M_{B'_V B'_W}(Id_W \circ f \circ Id_V) \\ &= M_{B'_V B'_W}(Id_W) \cdot M_{B_V B_W}(f) \cdot M_{B'_V B_V}(Id_V) \\ &= M_{B'_V B'_W} \cdot M_{B_V B_W}(f) \cdot M_{B'_V B_V} \end{aligned}$$

Ejemplo 7.4.1 Sea $\phi : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal definida por $\phi(p(x)) = p'(x)$, para cada $p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Consideremos en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ las bases $B_2 = \{1, x, x^2\}$ y $B'_2 = \{x+1, x, x^2\}$ y en $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ las bases $B_3 = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $B'_3 = \{1, x+1, x+x^2, x^2+x^3\}$. Un sencillo cálculo nos proporciona la matriz:

$$M_{B_3 B_2}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si quisiésemos obtener ahora la matriz asociada a ϕ respecto a las bases B'_3 y B'_2 , aplicaríamos la fórmula:

$$M_{B'_3 B'_2}(\phi) = M_{B_2 B'_2} \cdot M_{B_3 B_2}(\phi) \cdot M_{B'_3 B_3},$$

teniendo en cuenta que:

$$M_{B'_3 B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y que

$$M_{B_2 B'_2} = (M_{B'_2 B_2})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, finalmente:

$$M_{B'_3 B'_2}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

7.4.1 Matrices equivalentes y Matrices semejantes

En el tema anterior vimos que dos matrices $A, A' \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ son equivalentes ($A \approx A'$) si tienen el mismo rango, siendo ésta una relación de equivalencia en $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$. Además si $\text{rango}(A) = r$, se tiene que A es equivalente a

$$C_r = \begin{pmatrix} I_r & \theta_{r, n-r} \\ \theta_{m-r, r} & \theta_{m-r, n-r} \end{pmatrix}.$$

Si A y A' son dos matrices asociadas a una misma aplicación lineal $f : K^n \rightarrow K^m$ respecto a bases distintas, es decir

$$A = M_{B_1 B'_1}(f), \quad A' = M_{B_2 B'_2}(f),$$

siendo B_1 y B_2 dos bases de K^n y B'_1 y B'_2 dos bases de K^m , entonces sabemos que

$$A' = M_{B_2 B'_2}(f) = M_{B'_1 B'_2} \cdot M_{B_1 B'_1}(f) \cdot M_{B_2 B_1}$$

siendo $Q = M_{B'_2 B'_1}$ una matriz inversible de tamaño m y $P = M_{B_2 B_1}$ una matriz inversible de dimensión n . Pues bien, las condiciones anteriores son todas equivalentes, es decir:

Proposición 7.4.2 Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$. Son equivalentes:

1. $\text{rango}(A) = r$
2. $A = Q^{-1} \cdot C_r \cdot P$, siendo Q y P dos matrices inversibles de dimensiones m y n respectivamente
3. Existen B y B' bases de K^n y K^m , respectivamente, tales que $C_r = M_{B B'}(f_A)$.

7.4.3 Cuando A y A' son dos matrices en $\mathcal{M}_n(K)$, se dice que A y A' son semejantes si existe una matriz $P \in \mathcal{M}_n(K)$ inversible tal que:

$$A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Es evidente que la semejanza entre matrices cuadradas implica que son equivalentes.

Sin embargo, no toda matriz cuadrada A es semejante a una matriz diagonal. Esta situación se produce cuando existe una base B en K^n tal que

$$M_{BB}(f_A) = D,$$

siendo $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ una matriz diagonal. Puesto que $A = M_{CC}(f_A)$, siendo C la base canónica de K^n , es claro que:

$$D = M_{BB}(f_A) = M_{CB} \cdot A \cdot M_{BC} = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

y las columnas de P forman la base B que diagonaliza a f_A .

7.5 Aplicaciones Lineales y Teorema de Rouché

Sea $A \cdot X = B$ un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas. Denotemos por S el conjunto de soluciones del sistema, es claro que $S = f_A^{-1}(\{B\})$.

Es fácil ver que el sistema es compatible si, y sólo si, $B \in f_A(K^n)$, es decir

$$\text{rango}(A) = \text{rango}\{C_1, \dots, C_n\} = \text{rango}\{C_1, \dots, C_n, B\} = \text{rango}(A|B)$$

como ya sabíamos.

Suponiendo que el sistema es compatible, es fácil comprobar que si $x_0 \in K^n$ es una solución particular, el conjunto S se puede obtener como

$$S = \{x_0\} + \text{Ker}(f_A)$$

siendo $\text{Ker}(f_A)$ el conjunto de soluciones del sistema homogéneo cuya matriz asociada es A .

Así pues, el sistema será compatible determinado si, y sólo si, S es unitario, es decir $S = \{x_0\}$, o lo que es lo mismo $\text{Ker}(f_A) = \{\vec{0}\}$. Esta última condición es claramente equivalente a que $\text{rango}(A) = n$, ya que $n = \dim(\text{Ker}(f_A)) + \text{rango}(A)$.