Capítulo 3

Sistemas de Ecuaciones Lineales. Matrices y determinantes.

3.1 Sistemas de Ecuaciones Lineales

El problema central del Álgebra Lineal es la resolución de ecuaciones lineales simultáneas.

Una *ecuación lineal* con n-incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una expresión de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

donde a_i, para $i = 1, \ldots, n$ y b son elementos de un cuerpo K (habitualmente $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ o $\mathbb{Z}_p$). Los elementos a_i se denominan *coeficientes* y b *término independiente*. Si $b = 0$, la ecuación se dice *homogénea*.

Cuando tenemos varias ecuaciones lineales, hablaremos de sistema de ecuaciones lineales y los coeficientes llevarán un doble subíndice, para hacer referencia a la ecuación en la que aparecen y a la incógnita a la que multiplican (m ás adelante formarán parte de una matriz). Un *sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas* es una colección de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Un sistema de ecuaciones homogéneas se denomina *sistema homogéneo*. Una solución del sistema es una colección ordenada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de elementos de K tales que:

$$\begin{array}{c} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{array}$$

Denotaremos por S el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. S es pues un subconjunto de K^n.

Un sistema es *compatible* si admite alguna solución, es decir, $S \neq \emptyset$. En caso contrario, se denomina *incompatible*. Cuando la solución del sistema es única el sistema es *compatible determinado* y si hay más de una solución, se habla de sistema *compatible indeterminado*.

Dos sistemas con n incógnitas son *equivalentes* si tienen las mismas soluciones. Las operaciones permitidas para obtener sistemas equivalentes son:

1. Intercambiar dos ecuaciones del sistema.

2. Multiplicar una ecuación por un escalar, $a \in K$, no nulo.

3. Sumar a una ecuación otra distinta del sistema.
4. Aplicar reiteradamente las reglas anteriores; en particular, sumarle a una ecuación una combinación lineal (suma de múltiplos) de las restantes ecuaciones.

El caso más básico es aquel en el que el número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas. Para este caso, disponemos de dos métodos de resolución:

- Método de Eliminación de Gauss (es un método recursivo).
- Método del Determinante o Regla de Cramer.

El *Método de Gauss* consiste en transformar un sistema en otro equivalente que sea escalonado (a través de las operaciones permitidas) y resolver éste, si es posible, o concluir que no posee solución. Un sistema se denomina sistema escalonado si, en cada ecuación, la primera incógnita que aparece (la primera que está multiplicada por un coeficiente no nulo) no aparece en las siguientes ecuaciones del sistema, es decir, sus correspondientes coeficientes serían cero. El primer coeficiente no nulo en cada ecuación de un sistema escalonado se llama *pivote*.

Ejemplo 3.1.1 *Consideremos el sistema:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ 4x & + & y & & & = & -2 \\ -2x & + & 2y & + & z & = & 7 \end{array}$$

Procedamos a efectuar operaciones elementales en él. A la segunda ecuación le restamos la primera multiplicada por 2 *y a la tercera ecuación le sumamos la primera. Nos queda, entonces, el sistema*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & y & - & 2z & = & -4 \\ & & 3y & + & 2z & = & 8 \end{array}$$

A continuación, le sumamos a la tercera ecuación la segunda multiplicada por tres y nos queda:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & y & - & 2z & = & -4 \\ & & & - & 4z & = & -4 \end{array}$$

De la última ecuación, deducimos que $z = 1$. *Substituimos ese valor de* z *en la segunda ecuación, obtendremos* $y = 2$. *Finalmente, de la primera ecuación deducimos que* $x = -1$. *Se trata pues de un sistema compatible determinado. Geométricamente, podemos interpretarlo como tres planos que se cortan en un punto.*

Veámos ahora otros dos ejemplos de aplicación del método anterior.

Ejemplo 3.1.2 *Consideremos el sistema:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & - & z & = & -1 \\ 3x & + & y & + & z & = & 7 \end{array} \sim_{E_2-E_1, E_3-3*E_1, E_2/(-2), E_3/(-2)} \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Ahora le restamos a la tercera ecuación la segunda y, nos queda:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ & & & & 0 & \neq & -1 \end{array}$$

que se corresponde con un sistema incompatible. Sea ahora el sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -3 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ 3x & + & y & - & z & = & 2 \end{array} \sim_{E_2-2*E_1, E_3-3*E_1} \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -3 \\ & & 7y & - & 4z & = & 11 \\ & & 7y & - & 4z & = & 11 \end{array}$$

Si ahora le restamos a la tercera ecuación la segunda, nos queda:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -3 \\ & & 7y & - & 4z & = & 11 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Este sería un ejemplo de sistema compatible indeterminado. Podemos poner $z = t$, $y = \frac{4}{7}t + \frac{11}{7}$ y $x = \frac{1}{7}t + \frac{1}{7}$ con $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.1.3 *(Discusión de un sistema escalonado). Consideremos un sistema escalonado de m ecuaciones lineales, n incógnitas y con $r \leq n$ ecuaciones no nulas (algún coeficiente es distinto de cero) que supondremos las primeras del sistema. Se verifica que:*

1. *Si alguno de los términos independientes de las $m-r$ ecuaciones nulas es distinto de cero, el sistema es incompatible.*

2. *Si todos ellos son nulos, el sistema es compatible, pudiéndose dar dos casos:*
   (a) *Si $r = n$, el sistema es compatible determinado.*
   (b) *Si $r < n$, el sistema es compatible indeterminado.*

Demostración.

1. Supongamos $b_s \neq 0$. Si $0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + \cdots + 0 \cdot \alpha_n = b_s \Rightarrow 0 \neq 0$ (absurdo). Por tanto no existe solución.

2. (a) Reordenando el sistema, si es necesario, podemos suponer que tiene la forma

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{nn}x_n & = & b_n \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

   con $a_{ii} \neq 0$ para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Se resuelve despejando sucesivamente.

   (b) Si $r < n$. Transformamos el sistema en un sistema de r ecuaciones con r incógnitas escalonado y compatible. Para ello pasamos $n - r$ incógnitas a la parte derecha considerándolas parte del término independiente y se las denomina parámetros. (No pueden ser cualesquiera, lo habitual es considerar las incógnitas cuyos coeficientes son pivotes). A continuación se resuelve despejando sucesivamente, quedando la solución en función de los $n-r$ parámetros, y por tanto, no es única.

Ejemplo 3.1.4 *Dado un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, al calcular un sistema escalonado equivalente se obtiene:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & - & 2t & = & 4 \\ & & & & z & + & t & = & 1 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array} \sim \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & z & = & 4 & + & y & + & 2t \\ & & z & = & 1 & & & - & t \end{array}$$

Finalmente, tenemos el sistema equivalente

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 3 & + & y & + & 3t \\ z & = & 1 & & & - & t \end{array}$$

$$y, t \in \mathbb{R}.$$

3.2 Matrices

Como podemos observar, son los coeficientes y los términos independientes de cada ecuación de un sistema de ecuaciones lineales los implicados en el método de Gauss. Utilizaremos, pues, una representación de los sistemas haciendo uso de las matrices.

Definición 3.2.1 *Una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $m \times n$ sobre un cuerpo K es una colección de mn elementos de K dispuestos en una tabla de doble entrada con m filas y n columnas. Al elemento que ocupa la fila i-ésima y la columna j-ésima, se le denota a_{ij}. Así pues:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son iguales si tienen el mismo orden y, para cada par de índices i, j se verifica que $a_{ij} = b_{ij}$. Al conjunto de las matrices de orden $m \times n$ con coeficientes en K se denota $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Si $m = n$, las matrices se llaman *cuadradas* y el conjunto de todas ellas se denota por $\mathcal{M}_n(K)$. La matriz identidad de orden n, $I_n \in \mathcal{M}_n(K)$ es la matriz $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $a_{ij} = 1$ si $i = j$.

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada. A se dice que es:

- *simétrica* si $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$,
- *antisimétrica* si $a_{ij} = -a_{ji}$, para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$
- *triangular superior* si $a_{ij} = 0$, para todo $i > j$,
- *triangular inferior* si $a_{ij} = 0$, para todo $i < j$,
- *diagonal* si $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$.

Definición 3.2.2 *Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices en $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Se define la suma de A y B como una matriz $A + B$ en $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ cuyos coeficientes son*

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Si $\lambda \in K$ es un escalar, la matriz λA tiene por coeficientes

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Proposición 3.2.3 *Si $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $\lambda, \mu \in K$, se verifican las siguientes propiedades:*

1. *$(\mathcal{M}_{m\times n}(K), +)$ es un grupo abeliano,*
2. *$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,*
3. *$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,*
4. *$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$*
5. *$1_K A = A$.*

Demostración. (Ejercicio)

Definición 3.2.4 *Sean $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$ dos matrices. Se define el producto de A y B como una matriz $A \cdot B$ en $\mathcal{M}_{m\times p}(K)$ cuyos coeficientes son*

$$(A \cdot B)_{ij} = (a_{i1} \dots a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ y $j \in \{1, \dots, p\}$.

Proposición 3.2.5 *Sean $A, A' \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $B, B' \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$ y $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(K)$. Se verifican las siguientes propiedades:*

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
2. $(A + A') \cdot B = A \cdot B + A' \cdot B$.
3. $A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B'$.
4. $A \cdot I_n = A$ *y* $I_m \cdot A = A$.
5. *En* $\mathcal{M}_n(K)$ *existen divisores de cero propios.*
6. $(\mathcal{M}_n(K), +, \cdot)$ *es un anillo unitario no conmutativo con divisores de cero propios.*

Ejemplo 3.2.6

1. *En general,* $A \cdot B \neq B \cdot A$ *siendo* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ *y* $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(K)$. *Por ejemplo, las matrices de orden dos:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *En* $\mathcal{M}_2(K)$ *existen divisores de cero propios,*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 3.2.7 *Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ una matriz cualquiera. Se define la traspuesta de A como la matriz $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(K)$ tal que $(A^t)_{ji} = a_{ij}$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$.*

Proposición 3.2.8 *Se verifican las siguientes propiedades:*

1. $(A^t)^t = A$, *siendo* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$, *siendo* $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.
3. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$, *si* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.
4. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ *siendo* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ *y* $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$.
5. *Sea* $A \in \mathcal{M}_n(K)$.
   (a) A *es antisimétrica si, y sólo si,* $A^t = -A$.
   (b) A *es simétrica si, y sólo si,* $A = A^t$.
   (c) $A + A^t$ *es una matriz simétrica.*
   (d) $A - A^t$ *es una matriz antisimétrica.*

Demostración. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$ son dos matrices:

$$\left(A \cdot B\right)^t{}_{ij} = \left(A \cdot B\right)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (B^t)_{ik} \cdot (A^t)_{kj} = \left(B^t \cdot A^t\right)_{ij}$$

3.3 Forma matricial de un sistema

Dado un sistema de ecuaciones lineales

$$
\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

si denotamos por $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ a la matriz de coeficientes (*matriz asociada*), por $X = (x_1 \ldots x_n)^t \in \mathcal{M}_{n\times 1}(K)$ a la matriz columna de las incógnitas y por $B = (b_1 \ldots b_m)^t \in \mathcal{M}_{m\times 1}(K)$ a la matriz columna de los términos independientes, el sistema se puede expresar como:

$$A \cdot X = B \qquad \text{(forma matricial del sistema).}$$

La matriz $(A|B) \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}(K)$ se llama *matriz ampliada* del sistema.

Las operaciones elementales sobre las ecuaciones de un sistema que realiza el método de Gauss con el objeto de transformar el sistema en otro equivalente pero escalonado, se trasladan de forma natural a las operaciones elementales en las filas de la matriz ampliada de dicho sistema.

Las operaciones permitidas sobre las filas de una matriz dada (la matriz ampliada del sistema) para obtener la matriz ampliada de un sistema equivalente son:

1. Intercambiar dos filas cualesquiera de la matriz.

2. Multiplicar los elementos de una fila por un escalar no nulo.

3. Sumar a una fila otra fila distinta cualquiera de la matriz.

4. Aplicar reiteradamente las reglas anteriores; en particular, sumarle a una fila una *combinación lineal* (una suma de múltiplos) de las restantes filas.

Dos matrices se dice que son *equivalentes por filas* si una puede obtenerse de la otra mediante una secuencia finita de operaciones elementales en las filas.

Análogamente se pueden definir las mismas operaciones para las columnas de una matriz y obtener *matrices equivalentes por columnas*.

3.3.1 Matrices elementales

Las operaciones elementales efectuadas en una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, ya sean por filas o columnas, se pueden realizar multiplicando la matriz A por la izquierda, para las filas, o por la derecha, para las columnas, por determinadas matrices llamadas *matrices elementales*.

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

1. Sea A' la matriz obtenida intercambiando entre sí las filas i-ésima y j-ésima de la matriz A, entonces

   $$A' = E_{ij} \cdot A$$

   siendo E_{ij} la matriz elemental obtenida de la matriz identidad de orden m, I_m, intercambiando las filas i y j.

   Sea A'' la matriz obtenida intercambiando entre sí las columnas i y j de A. Entonces

   $$A'' = A \cdot \overline{E}_{ij}$$

   siendo $\overline{E}_{ij}$ la matriz obtenida de I_n intercambiando las columnas i y j.

2. Sea A' la matriz obtenida de A multiplicando la fila i-ésima por el escalar λ. Se tiene que

   $$A' = E_i(\lambda) \cdot A$$

siendo $E_i(\lambda)$ la matriz obtenida de I_m multiplicando la i-ésima fila por λ.

Sea A'' la matriz obtenida de A multiplicando la columna j-ésima por el escalar λ. Entonces

$$A'' = A \cdot \overline{E}_j(\lambda)$$

siendo $\overline{E}_j(\lambda)$ la matriz obtenida de I_n multiplicando la j-ésima columna por λ.

3. Sea A' la matriz obtenida de A sumando a la fila i-ésima la fila j-ésima. Se tiene que

$$A' = E_{i+j} \cdot A$$

siendo E_{i+j} la matriz obtenida de I_m sumando a la i-ésima fila la fila j-ésima.

Sea A'' la matriz obtenida sumando a la columna i la columna j de A. Entonces

$$A'' = A \cdot \overline{E}_{i+j}$$

siendo $\overline{E}_{i+j}$ la matriz obtenida de I_n sumando a la columna i la columna j.

En resumen, si denotamos por E una colección de operaciones elementales en filas y columnas realizadas sobre una matriz A siendo E^f las operaciones en filas y E^c las operaciones en columnas, la matriz resultante

$$E(A) = F \cdot A \cdot C$$

siendo $F = E^f(I_m)$ y $C = E^c(I_n)$, las matrices obtenidas de I_m y de I_n realizando en ellas las mismas operaciones elementales en filas y columnas respectivamente.

Una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ está en forma *escalonada por filas* si cada una de las filas de la matriz, excepto tal vez la primera, comienza con una secuencia de ceros con al menos un cero más que la fila anterior o está formada únicamente por ceros, dichas filas formadas únicamente por ceros, están colocadas en las últimas posiciones de la matriz.

La matriz asociada a un sistema escalonado es una matriz escalonada por filas.

Análogamente, se define el concepto de matriz escalonada por columnas.

Ejemplo 3.3.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así pues, para resolver un s.e.l. $A \cdot X = B$ por el método de Gauss consideramos la matriz ampliada del sistema y mediante operaciones elementales "en las filas" buscamos una matriz en forma escalonada que se corresponderá con un sistema equivalente al de partida.

Ejemplo 3.3.2

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -5 \end{array}$$

Consideremos la matriz ampliada

$$(A \mid B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Apliquemos el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

La matriz escalonada que hemos obtenido se corresponde con el sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ & & & & x_3 & = & -3 \end{array}$$

con solución $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -3$.

Otra alternativa es continuar realizando operaciones elementales sobre la última matriz hasta conseguir en la matriz de coeficientes que:

- En las filas no nulas, el primer elemento no nulo tenga el valor 1; lo denominaremos cabecera.
- En las columnas donde están situadas las cabeceras los restantes valores son nulos.

Este proceso se denomina *Gauss-Jordan*, la matriz obtenida diremos que está en forma escalonada reducida.

Ejemplo 3.3.3 *1. En el ejemplo anterior y trabajando con la matriz escalonada que obtuvimos, nos quedaría:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim_{F_2+F_3, F_1+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim_{F_1-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

llegaríamos a que la matriz ampliada es equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

que corresponde al sistema

$x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -3$.

Como se observa la columna de términos independientes es directamente la solución del sistema.

2. El sistema no ha de tener necesariamente tantas ecuaciones como incógnitas. Por ejemplo,

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array}$$

Su matriz ampliada es equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3.2 Matrices inversibles

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ sobre K. Diremos que A es *inversible o no singular* si existe otra matriz del mismo tamaño, denominada matriz inversa de A y denotada por A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$.

Si A no tiene inversa se dice que A es una *matriz singular*.

Proposición 3.3.4 *Si A y B son matrices cuadradas de orden n, se verifica:*

- *Si A es inversible, su inversa es única.*

- *Si A y B son inversibles, la matriz $A \cdot B$ es inversible y $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.*
- *Si A es inversible, su traspuesta también lo es y además $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.*
- *Si A es inversible, la matriz λA es inversible, para todo $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$. Además, $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$.*

Demostración.

Proposición 3.3.5 *Las matrices elementales son inversibles.*

Demostración.

Observación 3.3.6 *Sólo definimos matriz inversa para matrices cuadradas. No toda matriz cuadrada tiene inversa.*

Cálculo efectivo de la matriz inversa.

1. Por ejemplo, dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$
queremos calcular, si existe, su inversa. Esto equivale a encontrar una matriz B de orden 3×3 tal que $A \cdot B = I_3 = B \cdot A$. Se plantean 3 sistemas de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes asociada, la matriz A. En efecto, si
$$B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$
para que $A \cdot B = I_3$ tendremos que resolver:
$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \ A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
¿Por qué no resolverlos simultáneamente?

   Las operaciones elementales serán en los tres casos las mismas. Así, al transformar la matriz A en la identidad, las columnas de términos independientes serán las soluciones de cada sistema; formando las columnas de la inversa de A, siempre y cuando tal inversa exista.

2. Partiendo de la matriz A y realizando una serie de operaciones elementales en sus filas (columnas) la transformamos en la matriz I_n, realizando las mismas operaciones elementales a la matriz I_n, la matriz resultante es la inversa de A.

   Dada $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ consideremos E^f la colección de transformaciones en filas y E^c las transformaciones en columnas. Entonces:
$$I_n = E^f(A) = F \cdot A, \ \text{ con } F = E^f(I_n).$$
$$I_n = E^c(A) = A \cdot C, \ \text{ con } C = E^c(I_n).$$
   Además, $F = F \cdot I_n = F \cdot (A \cdot C) = (F \cdot A) \cdot C = I_n \cdot C = C$.

Para nuestra matriz A tendríamos:
$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 0 & 1/3 & 4/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 5/6 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -2/3 & -7/6 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 5/6 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

3.4 Determinantes

A cada matriz cuadrada A con coeficientes en K, le asociaremos un elemento de K llamado determinante de A. Este elemento nos servirá para caracterizar a las matrices inversibles y para resolver sistemas de ecuaciones lineales $A \cdot X = B$, en los que A es inversible. Daremos una definición recursiva de determinante de una matriz.

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ una matriz cuadrada con coeficientes en K.

Si $n = 1$, $det(A) = a_{11}$.

Si $n = 2$, $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Para $n \geq 3$, suponemos definidos los determinantes de cualquier matriz de orden $n-1$ y definimos:

$$det(A) := a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}. \tag{3.1}$$

donde, para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se define $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, siendo Δ_{ij} el determinante de la submatriz de orden $n-1$ que resulta de suprimir en A la fila i-ésima y la columna j-ésima.

La expresión 3.1 se denomina desarrollo de Laplace del determinante por los elementos de la fila i-ésima.

La definición anterior no depende de la fila i que escojamos en la matriz, es decir:

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \ldots + a_{jn}A_{jn}, \quad \forall i \neq j.$$

El desarrollo del determinante también puede efectuarse sobre los elementos de una columna:

$$det(A) := a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}. \tag{3.2}$$

La expresión 3.2 se denomina desarrollo de Laplace del determinante por los elementos de la columna j-ésima y no depende de la columna que escojamos en A.

Si quisiésemos calcular el determinante de una matriz A de orden tres desarrollándolo por la primera fila, nos queda:

$$\begin{aligned} det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

(Esta fórmula se conoce con el nombre de regla de Sarrus).

Proposición 3.4.1 *Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$.*

1. $det(A) = det(A^t)$.
2. *Si la matriz A tiene una fila (o columna) donde todos los coeficientes valen cero, su determinante vale cero.*
3. *Si A es una matriz triangular (superior o inferior), entonces $det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.*
4. *Si A es una matriz diagonal, entonces $det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.*

Demostración. La prueba de 1 es inmediata. Para justificar 2 basta desarrollar el determinante por los elementos de esa fila o columna. La afirmación 3 se demuestra por inducción en n, desarrollando el determinante por los elementos de la primera columna (si A es triangular superior) o de la primera fila si A es triangular inferior. Finalmente, como consecuencia se deduce 4.

3.5 Determinantes y operaciones elementales

En la sección anterior aprendimos a transformar una matriz cuadrada A en una triangular T realizando operaciones elementales en sus filas. Puesto que sabemos que $det(T) = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}$, será conveniente saber cómo le afecta cada operación elemental en las filas de A al cálculo del determinante.

Proposición 3.5.1 *Sean A y B dos matrices cuadradas. Se verifica:*

$$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$$

Proposición 3.5.2 *Sea A una matriz cuadrada. Se verifica:*

1. *Si en A intercambiamos entre sí dos filas (o dos columnas), obtenemos una matriz A' cuyo determinante es el opuesto del determinante de A.*
2. *Si en A multiplicamos los elementos de una fila (o columna) por un escalar λ, obtenemos una matriz A' cuyo determinante es el determinante de A multiplicado por λ.*
3. *Si en A le sumamos a los elementos de una fila F_i (o columna) los de otra fila F_j $(j \neq i)$ (o columna) multiplicados por $\lambda \in K$, obtenemos una matriz A' cuyo determinante es el de A.*
4. *Si una matriz A tiene dos filas (o columnas) iguales, su determinante vale cero.*
5. *Si en la fila i de una matriz A cada elemento $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ es suma de dos, entonces*

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{ij}+c_{ij} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Demostración. Para las tres primeras, basta tener en cuenta 3.5.1 y el valor del determinante de las matrices elementales:

$$det(E_{ij}) = -1 \ ; \ det(E_i(\lambda)) = \lambda \ ; \ det(E_{i+\lambda j}) = 1.$$

Si una matriz A tiene dos filas iguales $(F_i = F_j)$ y, en ella, hacemos $F_i - F_j$ obtenemos una matriz A' con el mismo determinante que A y con una fila de ceros, así que $det(A) = 0$.

Para demostrar la última propiedad, basta desarrollar el determinante por la fila i-ésima.

Observación 3.5.3 *Si una fila F_i (o columna) es una suma de mútiplos de otras filas (o columnas), es decir, $F_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j F_j$, su determinante es cero.*

3.6 Determinante y matriz inversa

Veremos cómo el determinante de una matriz nos permite saber cuándo dicha matriz es inversible.

Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ una matriz cuadrada. La *matriz adjunta* de A, $Adj(A)$, es una matriz cuyos coeficientes son los adjuntos $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ de los elementos de A.

Teorema 3.6.1 *Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$. La matriz A es inversible si, y sólo si, $det(A) \neq 0$. Además*

$$A^{-1} = det(A)^{-1} \cdot Adj(A)^t$$

Demostración. Si A es inversible, sabemos que

$$det(A) \cdot det(A^{-1}) = det(I_n) = 1,$$

por lo que, necesariamente $det(A) \neq 0$ y $det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$.

Supongamos ahora que el determinante de A no es cero y demostremos que

$$C = A \cdot Adj(A)^t = det(A) \cdot I_n.$$

Recordemos que en la posición (k, i) la matriz $Adj(A)^t$ tiene el coeficiente (i, k) de $Adj(A)$ y coincide con el adjunto A_{ik} de A.

Para cada i, se tiene que:

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = det(A)$$

Si, tomamos $i \neq j$, entonces:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk} = 0,$$

puesto que se trata del determinante de la siguiente matriz, que tiene dos filas iguales

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Análogamente, $Adj(A)^t \cdot A = det(A) \cdot I_n$. Por tanto, $A^{-1} = det(A)^{-1} \cdot Adj(A)$.

Observación 3.6.2 *Con el resultado anterior ya podemos garantizar que si B es una matriz cuadrada de orden n tal que $A \cdot B = I_n$ o $B \cdot A = I_n$, entonces, necesariamente A es inversible, siendo precisamente B la inversa de A.*

En efecto, si $A \cdot B = I_n$ entonces det(A)· det (B)=det(I_n)=1, así $det(A) \neq 0$ y, por tanto, es inversible. Entonces,

$$B = (A^{-1} \cdot A) \cdot B = A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot I_n = A^{-1}.$$

3.7 Regla de Cramer

Sea A una matriz cuadrada de orden n y sea $A \cdot X = B$ un s.e.l. con matriz asociada A. Si $det(A) \neq 0$, entonces el sistema es compatible determinado y la solución única es X^t, siendo X:

$$X = A^{-1} \cdot B = det(A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1i} & \cdots & A_{ni} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Solución. $A^{-1} \cdot B \in \mathcal{M}_{n \times 1}(K)$ verificando que $A \cdot (A^{-1} \cdot B) = I_n \cdot B = B$.

Unicidad. Si X_1^t y X_2^t son soluciones del sistema de ecuaciones lineales $A \cdot X = B$, entonces $A \cdot X_1 = A \cdot X_2$. Esto implica que, $X_1 = A^{-1} \cdot (A \cdot X_1) = A^{-1} \cdot (A \cdot X_2) = X_2$. Observemos que

$$A_{1i} \cdot b_1 + A_{2i} \cdot b_2 + \cdots + A_{ni} \cdot b_n = det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

con lo cual, para cada índice $i = 1, \ldots, n$ tenemos

$$x_i = (det(A))^{-1} \cdot det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3.7.1 *Resuelve por Cramer y por Gauss el siguiente sistema en $\mathbb{Z}_7$:*

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 6y & + & 4z & = & 3 \\ 4x & + & 5y & + & 3z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & 5z & = & 5 \end{array}$$

Empecemos resolviéndolo por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \sim_{F_2+3F_1, F_3-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{array}\right) \sim_{4F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{array}\right) \sim_{F_3-3F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim_{6F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim_{F_1+3F_3, F_2+3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim_{F_1+F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Para resolverlo por Cramer, empezamos calculando el determinante de A.

$$det \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 25 + 36 + 16 - 40 - 3 - 120 = 5.$$

Entonces, la solución viene dada por:

$$x = 5^{-1} \cdot det \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 = 5.$$

$$y = 5^{-1} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot 3 = 2.$$

$$z = 5^{-1} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot 0 = 0.$$