Capítulo 4

Espacios Vectoriales

4.1 Definiciones

Sea V un conjunto no vacío (cuyos elementos se llamarán *vectores*) y sea K un cuerpo (cuyos elementos se llamarán *escalares*).

Definición 4.1.1 *Se dice que V es un* espacio vectorial sobre K *o un* K-espacio vectorial *si:*

1. *$(V, +)$ es un grupo conmutativo.*
2. *Existe una operación externa, $\cdot : K \times V \to V$ tal que:*
   (a) $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$
   (b) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
   (c) $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$
   (d) $1_K\vec{v} = \vec{v}$

   para todos los vectores $\vec{u}, \vec{v} \in V$ y todos los escalares $\alpha, \beta \in K$.

(La operación externa se llama producto por escalares y, por comodidad, omitiremos la notación $\cdot$).

Proposición 4.1.2 *Si V es un $K-$ espacio vectorial, se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Dados $\alpha \in K$ y $\vec{v} \in V$, se tiene que*

$$\alpha\vec{v} = \vec{0} \Longleftrightarrow \alpha = 0 \text{ o } \vec{v} = \vec{0}$$

2. *Dados $\alpha \in K$ y $\vec{v} \in V$, se tiene que*

$$(-\alpha)\vec{v} = \alpha(-\vec{v}) = -(\alpha\vec{v}).$$

3. *Dados $\alpha, \beta \in K$ y $\vec{u} \neq \vec{0} \in V$, se tiene que si $\alpha\vec{u} = \beta\vec{u}$, entonces $\alpha = \beta$.*
4. *Dados $\alpha \neq 0 \in K$ y $\vec{u}, \vec{v} \in V$, se tiene que si $\alpha\vec{u} = \alpha\vec{v}$, entonces $\vec{u} = \vec{v}$.*

Demostración.

Ejemplo 4.1.3 *Los siguientes conjuntos tienen estructura de espacio vectorial con las operaciones usuales*

1. $K^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \; ; \; x_i \in K\}$
2. $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$
3. $\mathcal{A}(K, K) = K^K = \{f : K \to K, \; f \textit{ aplicación}\}$

4. $K[x]$

5. $\mathcal{P}_n(K) = \{p(x) \in K[x] \ ; \ grado\,(p(x)) \leq n\}$ *(polinomios con coeficientes en K de grado menor o igual que n).*

Sea V un K-espacio vectorial. Si $U \subseteq V$ es un subconjunto no vacío de V, se dice que U es un *subespacio vectorial de* V si U es un espacio vectorial sobre K considerando en U las mismas operaciones definidas en V.

Proposición 4.1.4 *Sea $U \subseteq V$ un subconjunto no vacío de V, son equivalentes:*

1. *U es un subespacio vectorial de V.*
2. *Para cualesquiera $\vec{u}, \vec{u'} \in U$ y $\alpha \in K$, se tiene que $\vec{u} + \vec{u'} \in U$ y $\alpha\vec{u} \in U$.*
3. *Para cualesquiera $\vec{u}, \vec{u'} \in U$ y $\alpha, \beta \in K$, se tiene que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{u'} \in U$.*

Demostración.

Ejemplo 4.1.5 1. *En $\mathbb{R}^3$, el conjunto:*

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 2x - 3y = 0 \ , \ x + 2z = 0\right\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

2. *En general, en K^n, se tiene que el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo es siempre un subespacio vectorial:*

$$U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \ ; \ A(x_1, \ldots, x_n)^t = (0, \ldots, 0)^t\},$$

siendo $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

Más adelante, veremos que cualquier subespacio vectorial de K^n es de este tipo.

3. *Si $m \leq n$ son dos números naturales, se tiene que $\mathcal{P}_m(K)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_n(K)$ y ambos lo son del espacio vectorial $K[x]$.*

4. *Si $U, W \subseteq V$ son dos subespacios vectoriales de V, también lo es $U \cap W$ y, en general, no lo es $U \cup W$.*

5. *El conjunto $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de funciones continuas y el conjunto de funciones derivables $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.*

4.2 Dependencia e Independencia Lineal

Sea V un K-espacio vectorial y sea $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ un subconjunto cualquiera de vectores de V. Una *combinación lineal* de los vectores de S es un vector $\vec{v}$ que se escribe como

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{v}_p = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\vec{v}_i$$

donde $\alpha_i \in K$.

Ejemplo 4.2.1 1. *El vector $\vec{0}$ es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores (tomando $\alpha_i = 0$ para todo i).*

2. *En $\mathbb{R}^3$, se tiene que*

$$(1, 1, 0) = (-1)(2, 1, -1) + 1(3, 2, -1)$$

Proposición 4.2.2 *1. El conjunto de las combinaciones lineales de S es un subespacio vectorial de V llamado* subespacio generado o engendrado *por S y se denota $< S >$.*

2. $< S >$ es el menor subespacio vectorial de V que contiene a S.

Definición 4.2.3 *Dos conjuntos de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ y $T = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_r\}$ son* equivalentes *si $< S > = < T >$.*

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$, se tiene que

$$< (0,0,1), (0,1,0) > = < (0,1,1), (0,1,-1) > = \{(0,y,z)\ ;\ y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Esta relación es una relación de equivalencia en $\{S \subseteq V\ ;\ |S| \text{ es finito}\}$.

Definición 4.2.4 *Sea $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ un conjunto de vectores de V. Diremos que*

1. *S es un conjunto* libre *o* un conjunto de vectores linealmente independientes *si, se tiene que*

$$\text{si } \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0} \text{ entonces } \alpha_i = 0, \text{ para todo } i = 1, \cdots, p.$$

2. *S es un conjunto* ligado *o* un conjunto de vectores linealmente dependientes *si, existe una combinación lineal de los vectores de S tal que*

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0},$$

donde algún $\alpha_i \neq 0$.

Ejemplo 4.2.5 *1. En $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, se tiene que los vectores $1, x, x^2$ y x^3 forman un conjunto de vectores linealmente independientes.*

2. En $\mathbb{R}^3$, los vectores $\{(1,1,0), (2,1,-1), (3,2,-1)\}$ forman un conjunto ligado.

Proposición 4.2.6 *S es libre si, y sólo si, ningún vector de S es combinación lineal de los demás. Equivalentemente, S es ligado si algún vector de S es combinación lineal de los demás.*

Demostración. Supongamos que el vector $\vec{v}_i$ es combinación lineal de los otros: $\vec{v}_i = \sum_{j=1, i\neq j}^{n} \alpha_j \vec{v}_j$. Equivalentemente, $\sum_{j=1, i\neq j}^{n} \alpha_j \vec{v}_j - \vec{v}_i = \vec{0}$, luego S no es libre. Recíprocamente, dada $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0}$, si algún $\alpha_j \neq 0$, existe α_j^{-1} (K es un cuerpo) y, así

$$\vec{v}_j = \sum_{i=1, i\neq j}^{n} -\alpha_j^{-1} \alpha_i \vec{v}_i$$

es decir $\vec{v}_j$ es combinación lineal de los demás vectores de S.

Proposición 4.2.7 *Sean $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ y $T = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_r\}$ dos conjuntos de vectores en V. Se verifica que:*

1. *Si $\vec{w} \in < S >$ y $S \subseteq < T >$, entonces $\vec{w} \in < T >$.*
2. *S y T son equivalentes si, y sólo si, cada vector de S es combinación lineal de los vectores de T y viceversa ($S \subseteq < T >$ y $T \subseteq < S >$).*
3. *Si S es libre y $\vec{v} \notin < S >$, entonces $S \cup \{\vec{v}\}$ es libre.*

Demostración. Veámos 3. Supongamos que existen α, α_i (con $i = 1, \ldots, p$) tales que:

$$\alpha \vec{v} + \alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_p \vec{v}_p = \vec{0}.$$

Es claro que $\alpha = 0$ ya que, en otro caso, $\vec{v} \in < S >$. Pero, entonces

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_p \vec{v}_p = \vec{0},$$

con lo que concluimos que todos los escalares $\alpha_i = 0$, ya que S es libre.

4.3 Bases y Dimensión

Sea V un K-espacio vectorial.

Definición 4.3.1 *Se dice que V es un espacio vectorial* de tipo finito *(o finitamente generado) si existe $S \subseteq V$ finito tal que $V = < S >$. En este caso, se dice que S es un* sistema de generadores de V.

Definición 4.3.2 *Un conjunto de vectores $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ de V es una* base *de V si:*

- *B es un sistema de generadores de V ($V = < B >$),*
- *B es un conjunto libre.*

Ejemplo 4.3.3 *1. En K^n, el conjunto*

$$C_n = \{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)\}$$

es una base (llamada base canónica).

2. En $\mathcal{P}_n(K)$, el conjunto

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$$

es una base.

3. En $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$, el conjunto formado por las matrices:

$$\{U_k^r\ ;\ k = 1, \ldots, m \text{ y } r = 1, \ldots, n\}$$

donde

$$(U_k^r)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ y } j = r \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es una base de $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

Teorema 4.3.4 *Sea $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\} \subseteq V$. Son equivalentes:*

1. *B es una base de V.*
2. *Cualquier vector de V se escribe de* manera única *como combinación lineal de los vectores del conjunto B.*

Demostracón. Si $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_p\vec{v}_p$, los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ se llaman *coordenadas del vector $\vec{v}$* respecto a la base B. Además, se denotan:

$$M_B(\vec{v}) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)^t$$

o también

$$[\vec{v}]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)^t.$$

Veamos que un espacio vectorial de tipo finito siempre tiene una base.

Teorema 4.3.5 *Sea V un espacio vectorial de tipo finito y sean $L \subseteq G \subseteq V$ dos conjuntos de vectores, siendo L libre y G un sistema finito de generadores. Siempre se puede encontrar una base B de V tal que $L \subseteq B \subseteq G$.*

Demostración. En el conjunto:

$$\Phi = \{L' \text{ libre}\ ;\ L \subseteq L' \subseteq G\}$$

tomemos B de mayor cardinal (nótese que $|G|$ es finito). Para que B sea un base de V, falta ver que $V = < B >$. Sea $\vec{v} \in G$. Si $\vec{v} \notin < B >$, entonces $B \cup \{\vec{v}\}$ es un conjunto libre (Proposition 4.2.7) y además es un elemento de Φ. Sin embargo, $|B \cup \{\vec{v}\}| = |B| + 1 > |B|$, lo cuál es una contradicción. Así pues, se tiene que $G \subseteq < B >$ y, por lo tanto, $V = < G > \subseteq < B >$.

Corolario 4.3.6 *Sea $V \neq \{\vec{0}\}$ un espacio vectorial de tipo finito. V siempre admite una base.*

Demostración. Supongamos que $V =< G >$ y sea $\vec{0} \neq \vec{v} \in G$. Como $\{\vec{v}\} \subseteq G$ es un conjunto libre, el teorema anterior nos garantiza la existencia de una base B de V.

Corolario 4.3.7 *Sea $V \neq \{\vec{0}\}$ un espacio vectorial de tipo finito y sea $S \subseteq V$ un subconjunto finito libre de V. Existe B base de V tal que $S \subseteq B$.*

Demostración. Supongamos que $V = < G >$, siendo G un sistema finito de generadores. Es claro que $S \cup G$ es un sistema finito de generadores de V que contiene a S, por lo que, aplicando el Teorema 4.3.5, concluimos que existe B base de V tal que $S \subseteq B \subseteq S \cup G$.

Teorema 4.3.8 (Teorema de Steiniz o de la base incompleta) *Sea V un K-espacio vectorial de tipo finito. Sean $L = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\}$ un conjunto libre y $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ $(p \leq n)$ una base de V. Existe un conjunto $L' \subseteq B$ de cardinal $n - p$ tal que $L \cup L'$ es una base de V (es decir, L se puede completar a una base).*

Demostración.

1. Es claro que
$$\vec{u}_1 = \alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n$$
con algún $\alpha_i \neq 0$. Supongamos que $\alpha_1 \neq 0$, entonces, dado que
$$\vec{v}_1 = \alpha_1^{-1} \vec{u}_1 - \sum_{j=2}^{n} \alpha_1^{-1} \alpha_j \vec{v}_j$$
se deduce que
$$V =< \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n >=< \vec{u}_1, \vec{v}_2 \ldots, \vec{v}_n > .$$
Además, $\{\vec{u}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ sigue siendo libre ya que, si
$$\alpha \vec{u}_1 + \beta_2 \vec{v}_2 + \cdots + \beta_n \vec{v}_n = \vec{0}$$
y $\alpha \neq 0$, tendríamos que:
$$\vec{u}_1 = -\alpha^{-1} \beta_2 \vec{v}_2 + \cdots + -\alpha^{-1} \beta_n \vec{v}_n = \alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n$$
lo que contradice la unicidad de las coordenadas respecto de una base.
Así pues , $\alpha = 0$ y $\beta_2 \vec{v}_2 + \cdots + \beta_n \vec{v}_n = \vec{0}$, con lo que $\beta_i = 0$, para $i = 2, \ldots, n$, ya que $\{\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \subseteq B$ es libre.

2. Tomemos ahora $\vec{u}_2 \in < \vec{u}_1, \vec{v}_2 \ldots, \vec{v}_n >$ y supongamos que
$$\vec{u}_2 = \gamma_1 \vec{u}_1 + \gamma_2 \vec{v}_2 + \cdots + \gamma_n \vec{v}_n$$
Como $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es libre, algún $\gamma_i \neq 0$ (con $i = 2, \ldots, n$). Suponiendo que $\gamma_2 \neq 0$, se puede demostrar que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n\}$ es una base de V.

3. Repitiendo el proceso, llegaríamos a que $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p, \vec{v}_{p+1}, \ldots, \vec{v}_n\}$ es una base de V.

Ejemplo 4.3.9 *Completar $\{(0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ a una base de $\mathbb{R}^3$. Tomamos $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Puesto que:*
$$(0, 1, 1) = 0(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1)$$
cambiamos $(0, 1, 0)$ por $(0, 1, 1)$ y $B' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ es una base. Además:
$$(1, 0, 1) = 1(1, 0, 0) + 0(0, 1, 1) + 1(0, 0, 1)$$
con lo que remplazamos $(1, 0, 0)$ por $(1, 0, 1)$ y afirmamos que
$$B'' = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$
es una base de $\mathbb{R}^3$.

El teorema de Steiniz tiene importantes consecuencias:

Corolario 4.3.10 *Sean B y B' dos bases de V. Entonces $|B| = |B'|$ y a este cardinal común se le llama* dimensión *de V.*

Demostración. Supongamos que $|B| = p$, $|B'| = n$ y que $n > p$. Como B es libre y B' es una base de V, se puede encontrar $L' \subseteq B'$ de cardinal $n - p$ de modo que $B \cup L'$ es una base de V. Pero, al ser $L' \subseteq V = < B >$, entonces $L' \cup B$ no puede ser libre, lo cual implica que $n \leq p$. Análogamente $p \leq n$.

Corolario 4.3.11 *Sea V un espacio vectorial de tipo finito de dimensión n y sea $S \subseteq V$ un conjunto finito de vectores. Se verifica que:*

1. *Si S es libre, entonces $|S| \leq n$.*
2. *Si S es un conjunto de generadores de V, entonces $|S| \geq n$.*
3. *Si S es libre y $|S| = n$, S es una base de V.*
4. *Si S es un conjunto de generadores de V y $|S| = n$, S es una base de V.*

Demostración.

1. Si S es libre, por Corolario 4.3.7, existe una base B de V tal que $S \subseteq B$, por lo que:
$$|S| \leq |B| = dim(V) = n.$$
2. Si S es un conjunto de generadores de V y $\vec{v} \neq 0, \vec{v} \in S$, entonces por el Teorema 4.3.5, existe B base de V tal que $B \subseteq S$, con lo que
$$|S| \geq |B| = n$$
3. Si S es libre y $|S| = n$, sea B una base de V tal que $S \subseteq B$ (Teorema 4.3.8). Como $|S| = n = |B|$, se tiene que $S = B$.
4. Si S es un conjunto de generadores de V y $|S| = n$, sea B una base de V tal que $B \subseteq S$ (Teorema 4.3.5). Como $|B| = n = |S|$, se tiene que $S = B$.

Corolario 4.3.12 *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $U \subseteq V$ un subespacio vectorial de V. Entonces:*

1. *U es de tipo finito y $dim(U) \leq dim(V)$.*
2. *$dim(U) = dim(V)$ si, y sólo si, $U = V$.*

Demostración.

1. Si $S \subseteq U$ es cualquier conjunto de vectores linealmente independientes de U (y, por lo tanto de V), se tiene que $|S| \leq dim(V)$. Sea B un subconjunto libre de U del máximo cardinal, por un razonamiento análogo al del teorema 4.3.5, se tiene que $U = < B >$ y, en consecuencia, B es base de U, con lo que $dim(U) = |B| \leq dim(V)$.
2. Si $dim(U) = dim(V)$, sea B una base de U. B es un conjunto libre de V de cardinal $n = dim(V)$, por lo que B es también una base de V, es decir $U = < B > = V$.

4.4 Rango de vectores y rango de una matriz

Sea S un conjunto de vectores de un espacio vectorial V de tipo finito. Se denomina *rango* de S a $dim(< S >)$, luego el rango de S es el mayor número de vectores linealmente independientes que hay dentro de S.

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y sean $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_m\} \subseteq K^n$ las filas de A y $\{\vec{C}_1, \vec{C}_2, \ldots, \vec{C}_n\} \subseteq K^m$ las columnas de A. Llamaremos *rango por filas* de A a $rango(\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_m\}) \leq m$ y *rango por columnas* de A a $rango(\{\vec{C}_1, \vec{C}_2, \ldots, \vec{C}_n\}) \leq n$.

Teorema 4.4.1 *Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, entonces:*

$$rango_{filas}(A) = rango_{columnas}(A) := rango(A) \leq min(m, n)$$

Corolario 4.4.2 *Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, entonces:*

$$rango(A) = rango(A^t).$$

Teorema 4.4.3 *El rango de una matriz no se modifica haciendo operaciones elementales en las filas (o las columnas) de A.*

Demostración. El resultado es claro ya que:

1. $< \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_n > = < \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_j \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_n >$.
2. $< \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_n > = < \vec{v}_1, \ldots, \lambda\vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_n >$ si $\lambda \neq 0$.
3. $< \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_n > = < \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i + \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_n >$.

Observación 4.4.4 *Se verifica que*

1.
$$\begin{aligned} rango(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}) &= rango(\{\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}) \\ &= rango(\{\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}_2 - \vec{v}_3, \vec{v}_3\}) \\ &= rango(\{\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}_2 - \vec{v}_3, 2\vec{v}_3 - \vec{v}_1\}). \end{aligned}$$

2. $rango(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}) \neq rango(\{\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}_2 - \vec{v}_3, \vec{v}_3 - \vec{v}_1\})$.

4.4.1 Cálculo del rango

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Para calcular el rango de A, podemos utilizar dos métodos: por menores o realizar operaciones elementales en las filas o columnas de A. Con este segundo procedimiento, obtenemos una matriz E escalonada por filas (o columnas) y, tenemos en cuenta que $rango(A) = rango(E)$ = número de filas (o columnas) no nulas de E (nótese que las filas no nulas de E forman un sistema de vectores linealmente independientes de K^n). Veámos, a continuación cómo se calcula el rango mediante el proceso por menores.

Un menor de orden p de A es el determinate de una submatriz cuadrada de orden p de A que resulta de eliminar $m - p$ filas y $n - p$ columnas en A. El rango de A es p si existe un menor de orden p en A no nulo y todos los menores de A de orden mayor que p son nulos.

En lugar de calcular todos los posibles menores de orden $p + 1$ es suficiente comprobar aquellos que resultan de orlar Δ_p.

Se toma un menor Δ_p de orden $p \geq 1$ no nulo. Se forman todos los menores de orden $p + 1$ que resultan de orlar Δ_p con una fila $\vec{F}_i$ y todas las restantes columnas de A. Si todos los menores resultantes son nulos, se suprime esa fila y se procede con la siguiente, hasta que:

1. Encontramos un menor de orden $p + 1$ no nulo con el que repetiríamos el proceso, ó
2. Todos los menores de orden $p + 1$ formados son nulos, con lo que el rango de A sería p.

Proposición 4.4.5 *Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$. El rango de A es n, si y, sólo si, $det(A) \neq 0$ (es decir A es inversible o regular).*

Demostración. El único menor de orden n de A es su determinante, así que el rango de A será máximo si y sólo si, su determinante es no nulo.

Dadas dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, se dice que son *equivalentes* si

$$rango(A) = rango(B) = r \in \{0, \dots, min(m, n)\}.$$

Esta es una relación de equivalencia en $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$. En cada clase de equivalencia hay un representante canónico C_r de la forma:

$$C_r = \begin{pmatrix} I_r & \theta_{r,n-r} \\ \theta_{m-r,r} & \theta_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

donde $\theta_{s,t} \in \mathcal{M}_{s\times t}(K)$ es la matriz con todos sus coeficientes nulos.

Si lo que queremos es calcular el rango de un conjunto de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$, lo que haremos será tomar una base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ de V y hallaríamos las coordenadas de los vectores de S respecto a la base B:

$$\begin{gathered} \vec{v}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + \dots + a_{1n}\vec{e}_n \\ \vec{v}_2 = a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \dots + a_{2n}\vec{e}_n \\ \vdots \\ \vec{v}_m = a_{m1}\vec{e}_1 + a_{m2}\vec{e}_2 + \dots + a_{mn}\vec{e}_n \end{gathered}$$

Así, se forma una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ cuyas filas son las coordenadas de cada vector de S respecto a la base B. Se tiene que $rango(S) = rango(A)$. Si calculamos el rango de A hallando una matriz escalonada E equivalente por filas a A, las filas no nulas de E nos dan las coordenadas respecto a B de los vectores de una base de $< S >$.

Ejemplo 4.4.6 *Calcular el rango de $S \subseteq \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, siendo:*

$$S = \left\{ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Procediendo como hemos comentado, tenemos que

$$\begin{aligned} rango(S) &= rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \\ &= rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \\ &= rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3. \end{aligned}$$

Se tiene que

$$< S >=< \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} >$$

y esas tres matrices forman una base de $< S >$ pues son linealmente independientes.

4.5 Matriz de cambio de base

Sea $V = \mathbb{R}^2$ y sean $B = \{(\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)\}$ y $B' = \{(\vec{e'}_1 = (1,1), \vec{e'}_2 = (1,-1)\}$ dos bases de V. Si $[\vec{v}]_B = (v_1, v_2)^t$ son las coordenadas de un vector $\vec{v}$ respecto a la base B, cuáles son las coordenadas $[\vec{v}]'_B = (v'_1, v'_2)^t)$ respecto a la base B'?

$$\begin{array}{rcl} \vec{v} & = & v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 \\ & = & v_1(\frac{1}{2}\vec{e'}_1 + \frac{1}{2}\vec{e'}_2) + v_2(\frac{1}{2}\vec{e'}_1 + \frac{-1}{2}\vec{e'}_2) \\ & = & (\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2)\vec{e'}_1 + (\frac{1}{2}v_1 + \frac{-1}{2}v_2)\vec{e'}_2 \\ & = & v'_1\vec{e'}_1 + v'_2\vec{e'}_2 \end{array}$$

De este modo, se tiene que:

$$[\vec{v}]_{B'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} [\vec{v}]_B$$

Sea ahora V un K-espacio vectorial de dimensión n y sean $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ y $B' = \{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_n\}$ dos bases de V. Si sabemos que $[\vec{v}]_B = (v_1, \ldots, v_n)^t$ y $[\vec{v}]_{B'} = (v'_1, \ldots, v'_n)^t$ son las coordenadas del vector $\vec{v}$ respecto a las bases B y B' respectivamente, ¿qué relación existe entre ambas?

$$\begin{array}{rcl} \vec{v} & = & v_1\vec{e}_1 + \cdots + v_n\vec{e}_n \\ & = & v_1(\sum_{i=1}^n a_{i1}\vec{e'}_i) + \cdots + v_n(\sum_{i=1}^n a_{in}\vec{e'}_i) \\ & = & (\sum_{j=1}^n a_{1j}v_j)\vec{e'}_1 + \cdots + (\sum_{j=1}^n a_{nj})\vec{e'}_n \\ & = & v'_1\vec{e'}_1 + \cdots v'_n\vec{e'}_n \end{array}$$

es decir, si a la matriz $(a_{ij}) = M_{BB'}$ la llamamos *matriz de cambio de base de B* a B', se tiene que:

$$[\vec{v}]_{B'} = M_{BB'}[\vec{v}]_B$$

Obsérvese que la columna j-ésima de $M_{BB'}$ la forman las coordenadas del vector $\vec{e}_j$ respecto a la base B'.

Proposición 4.5.1 *Sea V un K-espacio vectorial y sean B y B' dos bases de V y $M_{BB'}$ la matriz de cambio de base de B a B'. Esta matriz es inversible y además:*

$$(M_{BB'})^{-1} = M_{B'B}.$$

Demostracón.

Ejemplo 4.5.2 *Halla en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ la matriz de cambio de base $M_{BB'}$ siendo*

$$B = \{1, x, x^2 - x\} \text{ y } B' = \{x+1, x, x^2\}$$

Puesto que

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1 \cdot (x+1) + (-1) \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ x & = & 0 \cdot (x+1) + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ x^2 - x & = & 0 \cdot (x+1) + (-1) \cdot x + 1 \cdot x^2 \end{array}$$

concluimos que

$$M_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Análogamente,

$$\begin{array}{rcl} x+1 & = & 1\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot (x^2 - x) \\ x & = & 0\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot (x^2 - x) \\ x^2 & = & 0\cdot 1 + 1\cdot x + 1\cdot (x^2 - x) \end{array}$$

es decir

$$M_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que $M_{BB'} = (M_{B'B})^{-1}$.

4.6 Teorema de Rouché-Frobenius

Teorema 4.6.1 *Sea* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ *y* $AX = B$ *un sistema de ecuaciones lineales. Se verifica que:*

1. *El sistema es compatible si, y sólo si,* $rango(A) = rango(A|B)$.
2. *Si el sistema es compatible, se tiene que es compatible determinado (respectivamente, indeterminado) si, y sólo si,* $r = n$ *(respectivamente,* $r < n$*).*

Demostracíon.

1. El sistema es compatible si, y sólo si, existen $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que,

   $$B = x_1\vec{C}_1 + \cdots + x_n\vec{C}_n,$$

   siendo $\vec{C}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ las columnas de A, es decir; si, y sólo si, B es combinación lineal de $\{\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_n\}$, o sea $rango(A) = rango(A|B)$.

2. Supongamos que $rango(A) = rango(A|B) < n$, entonces el conjunto $\{\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_n\}$ es ligado, es decir, existe $\beta_i \neq 0$ tal que

   $$\beta_1\vec{C}_1 + \cdots + \beta_i\vec{C}_i + \cdots + \beta_n\vec{C}_n = \vec{0}$$

   Ahora es fácil comprobar que si $(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ es una solución cualquiera, otra solución es $(x_1 + \beta_1, \ldots, x_i + \beta_i, \ldots, x_n + \beta_n)$

   Recíprocamente, si $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$ son dos soluciones distintas de $AX = B$ (existe i tal que $x_i \neq y_i$), tenemos que:

   $$B = x_1\vec{C}_1 + \cdots + x_n\vec{C}_n = y_1\vec{C}_1 + \cdots + y_n\vec{C}_n$$

   con lo cual, deducimos que:

   $$\vec{0} = (x_1 - y_1)\vec{C}_1 + \cdots + (x_n - y_n)\vec{C}_n$$

   y $x_i - y_i \neq 0$, es decir $\{\vec{C}_1, \ldots, \vec{C}_n\}$ es ligado y $rango(A) < n$.