Capítulo 5

Aplicaciones Lineales

5.1 Definición y Propiedades

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K.

Definición 5.1.1 *Se dice que una aplicación $f : V \to W$ es una* aplicación lineal *o un* homomorfismo de espacios vectoriales *si verifica:*

- $f(\vec{v} + \vec{v'}) = f(\vec{v}) + f(\vec{v'})$
- $f(\alpha\vec{v}) = \alpha f(\vec{v})$

para cualquier par de vectores $\vec{v}, \vec{v'} \in V$ y cualquier $\alpha \in K$. Las dos condiciones anteriores se pueden substituir por la condición única:

$$f(\alpha\vec{v} + \beta\vec{v'}) = \alpha f(\vec{v}) + \beta f(\vec{v'})$$

siendo $\vec{v}, \vec{v'} \in V$ y $\alpha, \beta \in K$.

Ejemplo 5.1.2

1. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por $f(x, y) = x$. Es claramente una aplicación lineal.*
2. *También es lineal la aplicación $f : V \to V$ definida por $f(\vec{v}) = \alpha\vec{v}$, siendo $\alpha \in K$ cualquier escalar.*
3. *Generalizando el primer ejemplo se tiene que para cualquier par de números naturales m y n, y cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, la aplicación $f_A : K^n \to K^m$, definida por*

   $$f_A(x_1, \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, x_n)^t$$

   es lineal. Además, cualquier aplicación lineal entre estos dos espacios vectoriales viene definida de esta manera.
4. *Sea $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el conjunto formado por las funciones derivables. La aplicación*

   $$\phi : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}},$$

   definida por $\phi(f) = f'$, que asocia a cada función f su derivada, es lineal.
5. *Igual que en el ejemplo anterior, son aplicaciones lineales*

   $$\phi : K[x] \to K[x], \ \ y \ \phi |_{\mathcal{P}_n(K)}: \mathcal{P}_n(K) \to \mathcal{P}_{n-1}(K),$$

   que asocian a cada polinomio $p(x)$ de grado menor o igual que n su derivada $p'(x)$ de grado menor o igual que $n - 1$.

Veámos algunas propiedades que se deducen de la definción:

1. Como f es un morfismo de grupos entre $(V, +)$ y $(W, +)$, se tiene que $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ y $f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$.
2. Si $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ es un conjunto de vectores de V y $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ son escalares de K,
$$f(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(\vec{v}_i).$$
3. Si $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\} \subset V$ es un conjunto ligado o linealmente dependiente entonces $\{f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_p)\}$ es un subconjunto de W formado por vectores linealmente dependientes.

   Sin embargo, vectores linealmente independientes no se transforman, necesariamente, en vectores linealmente independientes. Basta tomar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $f(x, y) = (x + y, 0)$ y el vector $(1, -1)$ cuya imagen es $(0, 0)$.
4. Si U, V y W son tres espacios vectoriales sobre K y $f : U \to V$ y $g : V \to W$ son dos aplicaciones lineales, la composición $g \circ f : U \to W$ también es lineal.

Una aplicación lineal f inyectiva se llama *monomorfismo.* Si f es sobreyectiva, se dice que es un *epimorfismo* y, finalmente, si es biyectiva diremos que f es un *isomorfismo.* Un *automorfismo* de V es un isomorfismo $f : V \to V$.

5.2 Núcleo e Imagen de una Aplicación Lineal

Proposición 5.2.1 *Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal entre dos espacios de dimensión finita. Se verifica que:*

1. *Si $U \subseteq V$ es un subespacio vectorial de V, se tiene que $f(U)$ es un subespacio vectorial de W. Además si $U = < \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p >$, se tiene que $f(U) = < (f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_p) >$.*

   En particular $f(V) = Im(f)$ se llama subespacio imagen *y a su dimensión se le llama* rango *de f, es decir, $dim(Im(f)) = rango(f)$.*
2. *Análogamente si $W' \subseteq W$ es un subespacio vectorial de W, se tiene que $f^{-1}(W')$ es un subespacio vectorial de V. En particular, el subespacio $Ker(f) = f^{-1}\left(\{\vec{0}_W\}\right)$ se llama* núcleo *de f.*

(*Demostración.*)
Puesto que una aplicación lineal f también es un morfismo de grupos, se tiene que f es inyectiva si, y sólo si, $Ker(f) = \{\vec{0}_V\}$.

Proposición 5.2.2 *Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Son equivalentes:*

1. *f es inyectiva.*
2. *Si L es cualquier conjunto libre de V, entonces $f(L)$ es libre en W.*
3. *Si B es una base de V, entonces $f(B)$ es una base de $f(V)$.*

Demostración. Supongamos que f es inyectiva y $L = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ es un conjunto libre. Si
$$\alpha_1 f(\vec{v}_1) + \cdots + \alpha_p f(\vec{v}_p) = \vec{0}_W$$
con $\alpha_i \in K$, se tiene que $\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_p\vec{v}_p \in Ker(f)$, así que $\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_p\vec{v}_p = \vec{0}_V$ y como L es libre todos los escalares $\alpha_i = 0$.

Si B es una base de V, se tiene que $f(B)$ es un sistema de generadores de $f(V)$ y, al ser B libre se puede afirmar que $f(B)$ es una base de $f(V)$.

Finalmente supongamos la última hipótesis y tomemos $\vec{v} \in V$ un vector de V tal que $f(\vec{v}) = \vec{0}_W$. Si $\vec{v} \neq \vec{0}_V$, se puede encontrar B una base de V tal que $\vec{v} \in B$. Puesto que $f(\vec{v}) \in f(B)$ y $f(B)$ es una base de $f(V)$, llegamos a una contradicción ya que entonces $f(\vec{v}) \neq \vec{0}_W$.

Proposición 5.2.3 *Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Se verifica que f es sobreyectiva si, y sólo si, f transforma cualquier sistema de generadores de V en un sistema de generadores de W.*

Demostración. Sabemos que, si G es un sistema de generadores de V, entonces, para cualquier aplicación lineal f, se verifica que $f(V) = < f(G) >$. Luego, f es sobreyectiva si, y sólo si, $W = < f(G) >$, es decir, $f(G)$ es un sistema de generadores de W.

Teorema 5.2.4 (Teorema de la dimensión) *Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal entre dos espacios de dimensión finita. Se verifica que:*

$$dim(V) = dim(Ker(f)) + rango(f)$$

Demostración. Supongamos que $dim(V) = n$ y que $dim(Ker(f)) = p \leq n$. Sea $L = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\}$ una base de $Ker(f)$. Puesto que L es libre, el Teorema de Steiniz nos permite completar L a una base $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p, \vec{e}_{p+1}, \ldots, \vec{e}_n\}$ de V. Sabemos que

$$f(V) = < (f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_p), f(\vec{e}_{p+1}), \ldots, f(\vec{e}_n) > = < (f(\vec{e}_{p+1}), \ldots, f(\vec{e}_n) >$$

ya que los demás vectores pertenecen al núcleo de f. Si probamos que $\{f(\vec{e}_{p+1}), \ldots, f(\vec{e}_n)\}$ es una base de $f(V)$, se tendría que $dim(Im(f)) = rango(f) = n - p$. Puesto que ya sabemos que $\{f(\vec{e}_{p+1}), \ldots, f(\vec{e}_n)\}$ son generadores de $f(V)$, únicamente quedaría por probar que son linealmente independientes. Sean pues $\alpha_i \in K$, con $i = p + 1, \ldots, n$ tales que:

$$\alpha_{p+1} f(\vec{e}_{p+1}) + \cdots + \alpha_n f(\vec{e}_n) = \vec{0}_W.$$

Usando que f es lineal tenemos que $\alpha_{p+1}\vec{e}_{p+1} + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n$ pertenece al núcleo de f. Como L es una base de $Ker(f)$, existen $\beta_1, \ldots, \beta_p \in K$ de modo que:

$$\alpha_{p+1}\vec{e}_{p+1} + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n = \beta_1\vec{e}_1 + \cdots + \beta_p\vec{e}_p$$

o, lo que es lo mismo

$$\beta_1\vec{e}_1 + \cdots + \beta_p\vec{e}_p - \alpha_{p+1}\vec{e}_{p+1} - \cdots - \alpha_n\vec{e}_n = \vec{0}_V$$

pero al ser B libre concluimos que $\alpha_{p+1} = \cdots = \alpha_n = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$.

Como consecuencia del teorema anterior, se tienen los siguientes corolarios.

Corolario 5.2.5 *Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal entre dos espacios de dimensión finita. Se verifica que f es inyectiva si, y sólo si, $dim(V) = rango(f)$.*

Demostración. Basta tener en cuenta que f es inyectiva si, y sólo si, $dim(Ker(f)) = 0$ y aplicar el Teorema 5.2.4.

Corolario 5.2.6 *Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal entre dos espacios de dimensión finita. Se verifica que f es sobreyectiva si, y sólo si, $dim(V) = dim(Ker(f)) + dim(W)$.*

Demostración. Basta tener en cuenta que f es sobreyectiva si, y sólo si, $dim(f(V)) = dim(W)$ y aplicar el Teorema 5.2.4.

Corolario 5.2.7 *Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal entre dos espacios de dimensión finita. Se verifica que f es biyectiva si, y sólo si, $dim(V) = rango(f) = dim(W)$.*

Demostración.

Proposición 5.2.8 *Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal entre dos espacios de dimensión finita. Se tiene que:*

1. *Si $dim(V) = dim(W)$, entonces*

   f es un isomorfismo $\Leftrightarrow$ f es un monomorfismo $\Leftrightarrow$ f es un epimorfismo.

2. *Si f es un isomorfismo, la aplicación inversa f^{-1} es también un isomorfismo.*

3. *Si $f : V \to W$ y $g : W \to U$ son isomorfismos, entonces $g \circ f : V \to U$ es un isomorfismo y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Demostración.

5.3 Aplicaciones Lineales y Matrices

Es fácil comprobar que cualquier aplicación lineal entre dos espacios vectoriales V y W queda determinada por las imágenes de los vectores de una base de V. Si, por ejemplo, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal que verifica $f(1, 0) = (2, 1)$ y $f(0, 1) = (1, -1)$, es claro que

$$f(x, y) = xf(1, 0) + yf(0, 1) = (2x, x) + (y, -y) = (2x + y, x - y).$$

En un caso general, si $f : V \to W$ es una aplicación lineal y $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ es una base de V, veamos como queda determinada f por $f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i \in W$, con $i = 1, \ldots, n$. Supongamos que

$$M_B(\vec{v}) = (x_1, \ldots, x_n)^t$$

son las coordenadas de $\vec{v}$ respecto a B, se tiene que

$$f(\vec{v}) = f(x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n) = x_1 f(\vec{e}_1) + \cdots + x_n f(\vec{e}_n) = x_1\vec{w}_1 + \cdots + x_n\vec{w}_n.$$

Escribamos ahora cuáles son las coordenadas de cada $f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$ respecto a una base $B' = \{\vec{e'}_1, \ldots, \vec{e'}_m\}$ de W:

$$f(\vec{e}_i) = a_{1i}\vec{e'}_1 + \cdots + a_{mi}\vec{e'}_m.$$

Podemos formar pues una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ cuya columna i-ésima está formada por las coordenadas de $f(\vec{e}_i)$ respecto a la base B' $(i = 1, \ldots, n)$. A esta matriz la denotaremos $M_{BB'}(f)$ y la llamaremos *matriz asociada a f respecto a las bases B y B'*. Esta matriz verifica que, dado cualquier vector $\vec{v} \in V$, si

$$M_B(\vec{v}) = (x_1, \ldots, x_n)^t$$

son las coordenadas de dicho vector respecto a la base B y

$$M_{B'}(f(\vec{v})) = (y_1, \ldots, y_m)^t$$

son las coordenadas de su imagen respecto a la base B', se tiene que:

$$M_{B'}(f(\vec{v})) = M_{BB'}(f) \cdot M_B(\vec{v}).$$

En efecto,

$$\begin{array}{rcl}
f(\vec{v}) & = & x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \cdots + x_n f(\vec{e}_n) \\
& = & x_1(a_{11}\vec{e'}_1 + a_{21}\vec{e'}_2 + \cdots + a_{m1}\vec{e'}_m) \\
& + & x_2(a_{12}\vec{e'}_1 + a_{22}\vec{e'}_2 + \cdots + a_{m2}\vec{e'}_m) \\
& & \vdots \\
& + & x_n(a_{1n}\vec{e'}_1 + a_{2n}\vec{e'}_2 + \cdots + a_{mn}\vec{e'}_m) \\
& = & (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)\vec{e'}_1 \\
& + & (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)\vec{e'}_2 \\
& & \vdots \\
& + & (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n)\vec{e'}_m \\
& = & y_1\vec{e'}_1 + y_2\vec{e'}_2 + \cdots + y_m\vec{e'}_m.
\end{array}$$

Ejemplo 5.3.1 *1. Si A es una matriz en $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$, la aplicación:*

$$f_A : K^n \to K^m$$

tiene como matriz asociada respecto a las bases canónicas de K^n y K^m, respectivamente, a la matriz A, es decir:

$$M_{C_nC_m}(f_A) = A.$$

2. Si V es un espacio vectorial de dimensión n y, B y B' son dos bases de V, se tiene que:

$$M_{BB'}(id_V) = M_{BB'}.$$

Es inmediato comprobar que

Corolario 5.3.2 *Si V y W son dos espacios vectoriales sobre K, se tiene que V y W son isomorfos si, y sólo si, $dim(V) = dim(W)$.*

Demostración. Basta comprobar que si $dim(V) = dim(W) = n$ podemos tomar $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ y $B' = \{\vec{e'}_1, \ldots, \vec{e'}_n\}$ bases de V y W respectivamente y definir la aplicación lineal f que asocia cada $f(\vec{e}_i) = \vec{e'}_i$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Puesto que $V = < B >$ y $f(V) = < f(B) > = < B' > = W$, se tiene que f es un epimorfismo, y, en consecuencia, un isomorfismo (ver Proposición 5.2.8).

Corolario 5.3.3 *Sea $A = M_{BB'}(f)$ la matriz asociada a una aplicación lineal $f : V \to W$ respecto a un par de bases B y B' de V y W, respectivamente. Si $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ es otra matriz que verifica que, dado cualquier $\vec{v} \in V$,*

$$M_{B'}(f(\vec{v})) = C \cdot M_B(\vec{v})$$

entonces $A = C$.

Demostración. Si $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, entonces, para cada $i = 1, \ldots, n$, tenemos que:

$$C \cdot \vec{e_i} = C \cdot M_B(\vec{v}_i) = M_{B'}(f(\vec{v}_i)) = A \cdot M_B(\vec{v}_i) = A \cdot \vec{e_i}$$

siendo $\vec{e}_i$ el i-ésimo vector a la base canónica de K^n, con lo que las columnas de A y C coinciden, es decir $A = C$.

Corolario 5.3.4 *El K-espacio vectorial*

$$\mathcal{L}(V, W) = \{f : V \to W \ ; \ f \text{ es una aplicación lineal}\}$$

es isomorfo a $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ siendo $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$.

Demostración. Un isomorfismo

$$\varphi : \mathcal{L}(V, W) \to \mathcal{M}_{m\times n}(K)$$

viene determinado por un par de bases B y B' de V y W repectivamente. Dada $f \in \mathcal{L}(V, W)$, se define:

$$\varphi(f) = M_{BB'}(f).$$

El Corolario 5.3.3 permite deducir que si $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\alpha \in K$, entonces:

$$M_{BB'}(f + g) = M_{BB'}(f) + M_{BB'}(g) \text{ y } M_{BB'}(\alpha f) = \alpha M_{BB'}(f).$$

Proposición 5.3.5 *Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre K con $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$. Sean B y B' dos bases de V y W respectivament, y sea $A = M_{BB'}(f)$ la matriz asociada a f respecto a dichas bases. Se verifica que:*

1. $rango(f) = rango(A)$.

2. Si $m = n$ entonces, f es un isomorfismo si, y sólo si A es inversible.

Demostración. Si $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, sabemos que $f(V) = <(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n)>$ y, por lo tanto,

$$rango(f) = dim(f(V)) = rango\{f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n)\} = rango(A)$$

ya que las columnas de A son las coordenadas de cada vector $f(\vec{e}_i)$ respecto a la base B'.

Por otro lado, si $n = m$, sabemos que f es un isomorfismo si $n = dim(V) = dim(f(V)) = rango(f) = rango(A)$, lo que significa exactamente que A es inversible.

Ejemplo 5.3.6 *Si $U \subseteq K^n$ es un subespacio vectorial de K^n, sabemos que*

$$U = \{\vec{x} \in K^n \ ; \ A \cdot \vec{x} = \vec{0}\},$$

siendo A una matriz en $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Si aplicamos la fórmula de la dimensión a f_A, se tiene que:

$$n = dim(K^n) = dim(Ker(f_A)) + rango(f_A) = dim(U) + rango(A)$$

siendo $rango(A)$ el número de ecuaciones linealmente independientes que definen al subespacio U.

5.3.1 Composición de aplicaciones y Matrices Asociadas

Teorema 5.3.7 *Sean V, W y U tres K-espacios vectoriales de dimensiones n, m y p respectivamente y B_V, B_W y B_U bases de V, W y U respectivamente. Si $f : V \to W$ y $g : W \to U$ son aplicaciones lineales, la composición $g \circ f$ tiene como matriz asocida:*

$$M_{B_V B_U}(g \circ f) = M_{B_W B_U}(g) \cdot M_{B_V B_W}(f).$$

Demostración. Sabemos que, para cualquier $\vec{v} \in V$ y $\vec{w} \in W$, se verifica que:

$$M_{B_W}(f(\vec{v})) = M_{B_V B_W}(f) \cdot M_{B_V}(\vec{v}) \ \text{ y } \ M_{B_U}(g(\vec{w})) = M_{B_W B_U}(g) \cdot M_{B_W}(\vec{w})$$

Si ahora tenemos en cuenta 5.3.3 y que si $\vec{v} \in V$, se tiene que:

$$\begin{aligned} M_{B_W B_U}(g) \cdot M_{B_V B_W}(f) \cdot M_{B_V}(\vec{v}) &= M_{B_W B_U}(g) \cdot M_{B_W}(f(\vec{v})) \\ &= M_{B_W}(g(f(\vec{v}))) \\ &= M_{B_W}((g \circ f)(\vec{v})) \end{aligned}$$

se puede concluir que $M_{B_V B_W}(g \circ f) = M_{B_W B_U}(g) \cdot M_{B_V B_W}(f)$.

Ejemplo 5.3.8 *Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la aplicación lineal $f(x, y) = 2y - x$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por $g(t) = (3t, t, -t)$. De lo que hemos dicho se desprende que*

$$M_{C_2C_3}(g \circ f) = M_{CC_3}(g) \cdot M_{C_2C}(f) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

También podríamos haber calculado $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = g(2y - x) = (6y - 3x, 2y - x, x - 2y)$$

y verificar que es la aplicación lineal que se corresponde con la matriz asociada (respecto a las bases canónicas) calculada anteriormente.

Corolario 5.3.9 *Sea $f : V \to W$ un isomorfismo de espacios vectoriales ($dim(V) = dim(W) = n$) y sean B_V y B_W dos bases de V y W respectivamente. Sabemos que f^{-1} es un isomorfismo de espacios vectoriales y, además,*

$$M_{B_W B_V}(f^{-1}) = M_{B_V B_W}(f)^{-1}.$$

Demostración. Sólo hay que tener en cuenta que $id_V = f^{-1} \circ f$ y que

$$I_n = M_{B_V B_V}(id_V) = M_{B_W B_V}(f^{-1}) \cdot M_{B_V B_W}(f).$$

Corolario 5.3.10 *Sea V un K-espacio vectorial y B_1, B_2, B_3 tres bases de V. Se verifica que*

$$M_{B_1 B_3} = M_{B_2 B_3} \cdot M_{B_1 B_2}.$$

Demostración. Basta aplicar el Teorema anterior a la aplicación $id_V = id_V \circ id_V$. Se tiene,

$$M_{B_1 B_3} = M_{B_1 B_3}(id_V) = M_{B_1 B_3}(id_V \circ id_V) = M_{B_2 B_3}(id_V) \cdot M_{B_1 B_2}(id_V) = M_{B_2 B_3} \cdot M_{B_1 B_2}.$$

5.4 Cambio de Base y Matrices Asociadas

Veamos ahora la relación entre dos matrices asociadas a la misma aplicación lineal f respecto a distintas bases de los espacios vectoriales.

Sean $f : V \to W$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre K con $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$, B_V, B'_V bases de V, y B_W, B'_W bases de W.

Teniendo en cuenta que $f = Id_W \circ f \circ Id_V$, podemos afirmar:

$$\begin{aligned} M_{B'_V B'_W}(f) &= M_{B'_V B'_W}(Id_W \circ f \circ Id_V) \\ &= M_{B_W B'_W}(Id_W) \cdot M_{B_V B_W}(f) \cdot M_{B'_V B_V}(Id_V) \\ &= M_{B_W B'_W} \cdot M_{B_V B_W}(f) \cdot M_{B'_V B_V}. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.4.1 *Sea $\phi : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal definida por $\phi(p(x)) = p'(x)$, para cada $p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Consideremos en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ las bases $B_2 = \{1, x, x^2\}$ y $B'_2 = \{x+1, x, x^2\}$ y en $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ las bases $B_3 = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $B'_3 = \{1, x+1, x+x^2, x^2+x^3\}$. Un sencillo cálculo nos proporciona la matriz:*

$$M_{B_3\, B_2}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si quisiésemos obtener ahora la matriz asociada a ϕ respecto a las bases B'_3 y B'_2, aplicaríamos la fórmula:

$$M_{B'_3\, B'_2}(\phi) = M_{B_2 B'_2} \cdot M_{B_3\, B_2}(\phi) \cdot M_{B'_3 B_3},$$

teniendo en cuenta que

$$M_{B'_3 B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y que

$$M_{B_2 B'_2} = (M_{B'_2 B_2})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

finalmente, se tiene que

$$M_{B'_3\, B'_2}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.4.1 Matrices equivalentes y Matrices semejantes

En el tema anterior vimos que dos matrices $A, A' \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ son equivalentes ($A \approx A'$) si tienen el mismo rango, siendo ésta una relación de equivalencia en $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Además si $rango(A) = r$, se tiene que A es equivalente a

$$C_r = \begin{pmatrix} I_r & \theta_{r,n-r} \\ \theta_{m-r,r} & \theta_{m-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Si A y A' son dos matrices asociadas a una misma aplicación lineal $f : K^n \to K^m$ respecto a bases distintas, es decir

$$A = M_{B_1\,B_1'}(f)\ ,\ A' = M_{B_2\,B_2'}(f),$$

siendo B_1 y B_2 dos bases de K^n y B_1' y B_2' dos bases de K^m, entonces sabemos que

$$A' = M_{B_2\,B_2'}(f) = M_{B_1' B_2'} \cdot M_{B_1\,B_1'}(f) \cdot M_{B_2 B_1}$$

siendo $Q = M_{B_2' B_1'}$ una matriz inversible de tamaño m y $P = M_{B_2 B_1}$ una matriz inversible de dimensión n. Pues bien, las condiciones anteriores son todas equivalentes, es decir:

Proposición 5.4.2 *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Son equivalentes:*

1. *$rango(A) = r$.*
2. *$A = Q^{-1} \cdot C_r \cdot P$, siendo Q y P dos matrices inversibles de dimensiones m y n respectivamente.*
3. *Existen B y B' bases de K^n y K^m, respectivamente, tales que $C_r = M_{BB'}(f_A)$.*

5.4.3 *Cuando A y A' son dos matrices en $\mathcal{M}_n(K)$, se dice que A y A' son* semejantes *si existe una matriz $P \in \mathcal{M}_n(K)$ inversible tal que:*

$$A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Es evidente que la semejanza entre matrices cuadradas implica que son equivalentes.

Sin embargo, no toda matriz cuadrada A es semejante a una matriz diagonal. Esta situación se produce cuando existe una base B en K^n tal que

$$M_{BB}(f_A) = D,$$

siendo $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ una matriz diagonal. Puesto que $A = M_{CC}(f_A)$, siendo C la base canónica de K^n, es claro que:

$$D = M_{BB}(f_A) = M_{CB} \cdot A \cdot M_{BC} = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

y las columnas de P forman la base B que diagonaliza a f_A.

5.5 Aplicaciones Lineales y Teorema de Rouché-Frobenius

Sea $A \cdot X = B$ un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas. Denotemos por S el conjunto de soluciones del sistema, es claro que $S = f_A^{-1}(\{B\})$.

Es fácil ver que el sistema es compatible si, y sólo si, $B \in f_A(K^n)$, es decir,

$$rango(A) = rango\,\{C_1, \ldots, C_n\} = rango\,\{C_1, \ldots, C_n, B\} = rango(A|B)$$

como ya sabíamos.

Suponiendo que el sistema es compatible, es fácil comprobar que si $x_0 \in K^n$ es una solución particular, el conjunto S se puede obtener como

$$S = \{x_0\} + Ker(f_A)$$

siendo $Ker(f_A)$ el conjunto de soluciones del sistema homogéneo cuya matriz asociada es A.

Así pues, el sistema será compatible determinado si, y sólo si, S es unitario, es decir $S = \{x_0\}$, o lo que es lo mismo $Ker(f_A) = \{\vec{0}\}$. Esta última condición es claramente equivalente a que $rango(A) = n$, ya que $n = dim\,(Ker(f_A)) + rango(A)$.