CÁLCULO

Boletín III. **Ecuaciones diferenciales**

1. Resuelve los problemas de valores iniciales:

   a) (**DIC01**) $\begin{cases} (5-x)\sqrt{3-x}\,dz = dx \\ z(3) = -1 \end{cases}$ Solución: $z = -\left(1 + \sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{3-x}{2}}\right)$

   b) (**DIC98**) $\begin{cases} xy' - 3y = x^5 \\ y(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$ Solución: $y = x^3 + 0{,}5x^5$

   c) (**JUN00**) $\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{t^2-y^2}+y}{t} \\ y(1) = 0 \end{cases}$ Solución: $y = t\sin(\ln|t|)$

   d) (**JUN01**) $\begin{cases} y' = \dfrac{x\sec(\frac{y}{x})+y}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$ Solución: $y = x\arcsin(\ln|x|)$

   e) (**SEP01**) $\begin{cases} y' + y\cos x = \sin x\,\cos x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ Solución: $y = \sin x - 1 + 2e^{-\sin x}$

   f) (**FEB99**) $\begin{cases} y' = \dfrac{x+y}{x-y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$ Solución: $\arctan\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$

   g) (**SEP98**) $\begin{cases} y' + y = \sin x \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$ Solución: $y = 0{,}5(e^{\pi-x} + \sin x - \cos x)$

   h) $\begin{cases} e^{-\cos x}\left(y' + y\,\dfrac{\cos x}{\sin x}\right) = 5 \\ y(\frac{\pi}{2}) = -4 \end{cases}$ Solución: $y = (1-5e^{\cos x})/\sin x$

   i) $\begin{cases} \left(3x^2 + y^3e^y\right)dx + \left(3xy^2e^y + xy^3e^y + 3y^2\right)dy = 0 \\ y(2) = 0 \end{cases}$ Solución: $x^3 + xy^3e^y + y^3 = 8$

2. (**SEP03**) Un método para resolver la ecuación diferencial (llamada ecuación logística):

$$\frac{dP}{dt} = KP\left(1 - \frac{P}{L}\right) \quad ,$$

   donde K y L son constantes, es realizar el cambio de variable $P = 1/u$ y resolverla después.

   a) Reescribe la ecuación diferencial logística en términos de u y de t, y resuélvela.

   b) Usa el resultado obtenido en el apartado anterior para encontrar la solución P como función de t. Solución: $P(t) = Le^{kt}/(C + e^{kt})$

3. Resuelve la ecuación $y''' - y'' - 5y' - 3y = 0$ con las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$; $y''(0) = 8$.

   Solución: $y = (2x - 0{,}5)e^{-x} + 0{,}5e^{3x}$

4. (**JUN05**) Calcula la solución general de la e.d. $y''' + y' = 5x$

   Solución: $y = A + B\cos x + C\sin x$

5. Resuelve la ecuación $a'' - 2a' + 5a = 0$ verificando $a(0) = 1$; $a'(0) = 2$.

   Solución: $a(x) = 0{,}5e^x(2\cos 2x + \sin 2x)$

6. (**FEB03**) Calcular la solución general de la ecuación diferencial: $y''' - y'' - 2y' = 4\sin 2x + 2e^{-x}$.

   Solución: $y(x) = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-x} + 0{,}1(\sin 2x + 3\cos 2x) + 2xe^{-x}/3$

7. Cuando se disuelve azúcar en agua, la cantidad A que permanece sin disolver después de t minutos satisface la ecuación $\frac{dA}{dt} = -KA$, donde $K > 0$. Si el 25 % se disuelve después de un minuto, ¿cuánto tiempo hace falta para que se disuelva la mitad? Solución: $t \approx 2{,}41$ min

8. Un circuito RL tiene una f.e.m. $e(t) = 4\sin(t)$ voltios, una resistencia de 100Ω y una bobina de 4 Henrios. Sabiendo que no tiene corriente inicial, hallar la intensidad de corriente en cada instante.

   Solución: $i(t) = [e^{-25t} + 25\sin t - \cos t]/626$

9. Según la ley de Newton, el enfriamiento de un cuerpo en una corriente de aire es proporcional a la diferencia de temperaturas entre el cuerpo y el aire. Si la temperatura del aire es de 30^oC y el cuerpo pasa de 100^oC a 70^oC en 15 min, determinar al cabo de cuánto tiempo estará a 40^oC.

   Solución: $t = 52{,}16$ min

10. Se disuelven inicialmente 50 kg de sal en un gran tanque que contiene 300 l de agua. Se bombea salmuera al tanque a razón de 3 l/min, y luego la solución mezclada se bombea fuera del tanque también a razón de 3 l/min.

    a) Si la concentración de la solución que entra es de $\frac{1}{3}$ kg/l, determinar la cantidad de sal que hay en el tanque en un instante dado. Solución: $y(t) = 100 - 50e^{-0{,}01t}$ kg.

    b) Calcular la cantidad de sal que hay después de 50 min. Solución: $y = 69{,}67$ kg

    c) Calcular la cantidad de sal que hay en el tanque después de un tiempo suficientemente largo.

    Solución: $y_\infty = 100$ kg

11. (**FEB04**) Colgamos una masa m de uno de los dos extremos de un muelle y al aplicar una fuerza $f(t)$ la ecuación que describe el desplazamiento $x(t)$ en el instante t es:

$$x'' + 2x' + x = f(t)\ .$$

    a) Resuelve la ecuación diferencial para $f(t) = 0$ y las condiciones iniciales $\{x(0) = 1, x'(0) = 1\}$. Calcula $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$.

    b) Resuelve la ecuación diferencial para la fuerza $f(t) = 5t$, con las condiciones iniciales del apartado anterior. Solución: $x(t) = 11e^{-t} + 7te^{-t} - 10 + 5t$

12. (**JUN03**) En cierto país bárbaro, dos tribus vecinas se han odiado mutuamente desde tiempo inmemorial. Sus poderes son fuertes y una maldición solemne pronunciada por el hechicero de la primera tribu vuelve locos a los miembros de la segunda, conduciéndoles al asesinato y al suicidio.
    Si la variación de población por unidad de tiempo de la segunda tribu es $-\sqrt{P}$ personas por semana, y si su población cuando se profiere la maldición es de 676 personas, ¿cuánto tiempo tardará en extinguirse la segunda tribu? Solución: 52 semanas

13. (**FEB06**) Resolver el problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} y\prime + \tfrac{3x}{1-x^2}y &= (x-1)\left(1-x^2\right) \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$