

CÁLCULO

Boletín IV. Funciones reales de varias variables

1. **Razona** la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- a) Si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \lambda x^2) = 0$, entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.
- b) (**JUN03**) La norma del vector gradiente de la función $f(x, y) = xe^{2y-x}$ en el punto P de coordenadas $(2, 1)$ es 4.
- c) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua, donde $A = \{(x, y) / y^2 \leq 4x\}$. Entonces f alcanza máximo y mínimo sobre A .
- d) La función $z = (y - ax)(y - bx)$, donde a y b son dos constantes distintas entre sí, no tiene extremos relativos.
- e) Sea $f : \mathbb{R}^2 - \{(1, 2)\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} f(x, y) = 2$$

Entonces se verifica: $\lim_{y \rightarrow 2} f(1, y) = 2$

f) (**FEB04**) La función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en $(0, 0)$.

g) (**FEB04**) Consideramos dos funciones genéricas:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))^T \quad (u, v, w) \rightarrow g(u, v, w)$$

Si llamamos $h = g \circ f$, entonces:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f_3}{\partial x} \quad .$$

2. (**DIC01**) Sea:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) Hallar $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- b) ¿Se verifica la igualdad: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$? Justifica la respuesta.

3. (FEB99) Dada la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ a & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

se pide:

a) Determinar el valor de a de forma que f sea continua en el origen. SOLUCIÓN: $a = 0$

b) Para este valor de a , calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. SOLUCIÓN: 0

c) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ en $(1, 0)$.
SOLUCIÓN: $z = 0,25\pi + x - 1$

4. Sea f una función de dos variables que admite derivadas parciales de primer y segundo orden continuas en todo \mathbb{R}^2 . **Razona** la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:

a) Si (x_0, y_0) es un extremo condicionado de f , entonces el hessiano de f en dicho punto es estrictamente mayor que cero.

b) Si la derivada parcial segunda de f respecto de x dos veces es estrictamente negativa, entonces (x_0, y_0) es un máximo relativo de f .

c) La función f alcanza sus valores extremos sobre cualquier círculo del plano.

5. (FEB98) Hallar los extremos absolutos de $f(x, y) = xy$ sobre la elipse $x^2 + y^2 + xy = 4$.

SOLUCIÓN: $f_{\max} = 4/3$, $f_{\min} = -4$

6. (FEB01) Sea:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + 2y & \text{si } x = 0 \text{ ó } y = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Hallar $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$.

b) Comprobar que las únicas derivadas direccionales de f en el punto $(0, 0)$ que existen son las derivadas en las direcciones de los ejes coordenados.

7. La distancia de un punto P a un plano es la mínima distancia de P a cada uno de los puntos del plano. Hallar la distancia de $P = (0, 3, 4)$ al plano $x + 2y + z = 5$.

8. (SEP98) Si se gastan x millones de euros en mano de obra e y millones de euros en equipos, la producción de una factoría será: $Q(x, y) = 50x^{2/5}y^{3/5}$ unidades. Si se dispone de un total de 150 millones de euros, hallar cómo se deben distribuir entre trabajo y equipamiento para que la producción sea máxima. SOLUCIÓN: $x = 60$, $y = 90$

9. (SEP01) Hallar los puntos críticos de $f(x, y) = x^3 - 2y^2 - 2y^4 + 3x^2y$.

SOLUCIÓN: $M_r = f(-2, 1)$, pto. silla: $(-1, 05)$ y $(0, 0)$

10. Hallar los extremos absolutos de $f(x, y) = -5x^2 + 5xy + 5y^2 - 30x$ sobre el rectángulo $C = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 5, -2 \leq y \leq 2\}$.

11. (JUN00) Analiza los puntos críticos de la función $z = (x^2 - y^2)e^{-\frac{x^2 - y^2}{2}}$, encontrando sus extremos.

SOLUCIÓN: pto silla: $(0, 0)$; $M_r = f(\sqrt{2}, 0) = f(-\sqrt{2}, 0)$; $m_r = f(0, \sqrt{2}) = f(0, -\sqrt{2})$

12. **(FEB00)** Calcular los extremos absolutos, si existen, de $f(x, y) = x^3 + y^3$ en el conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4, -1 \leq y\}$.
13. **(FEB02)** La intensidad de luz en una habitación en la que se sitúa una lámpara de 300 W viene dada, en cada punto (x, y) , por la función:

$$i(x, y) = \frac{300}{4\pi [(x - 5)^2 + (y - 2)^2 + 9]}$$

- a) Calcula los puntos en los que la intensidad de luz es $3/\pi$. Representálos.
- b) Si estamos situados en el punto de coordenadas $(0, 4)$, ¿cuál es la dirección que debemos seguir para incrementar la intensidad de luz lo máximo posible? SOLUCIÓN: $\vec{v} = (5, -2)$
- c) Si la habitación ocupa el rectángulo $D = [0, 10] \times [0, 4]$, obtén los puntos de máxima y mínima intensidad, demostrando previamente su existencia.
14. **(FEB03)** Dados el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x^2 - 1, y \leq 2x - 0,5\}$ y la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$, se pide:

$$\text{SOLUCIÓN: } f_{\max} = f(5, 2); f_{\min} = f(0, 0) = f(0, 4) = f(10, 0) = f(10, 4)$$

- a) Dibuja el conjunto A . ¿Es compacto?
- b) Razona si f tiene extremos absolutos sobre A y, en caso afirmativo, calcúlalos.
15. **(FEB03)** Sea $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $(0, 0)$ y tal que $g(0, 0) = 1$. Construimos la función f dada por:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)g(x, y).$$

Se pide calcular:

- a) $D_v f(0, 0)$, $v \in \mathbb{R}^2$
- b) $\nabla f(0, 0)$.
16. **(JUN03)** Un agente de bolsa invierte 120000 EUR en acciones de dos empresas. Si la acción de la empresa A vale 30 EUR y la de la empresa B vale 10 EUR, calcula el número de acciones que debe comprar para maximizar la función $f(x, y) = 3 \ln(x + 1) + \ln(y + 1)$, sabiendo que x es el número de acciones que compra de A , e y el de acciones que compra de B .
17. **(SEP03)** Dada la función de dos variables $f(x, y) = x \arctan(y/x)$, razona la existencia de plano tangente en el punto $(1, 1)$. Calcúlalo.
18. **(FEB04)** El valor de una finca triangular viene dado por:

$$\frac{P}{2} \left(\frac{P}{2} - a \right) \left(\frac{P}{2} - b \right) \left(\frac{P}{2} - c \right),$$

donde a, b y c son las longitudes de sus lados y P es el perímetro de la finca. Calcula las longitudes de los lados de la finca triangular de mayor valor que podemos cercar con un alambre de longitud dada P .

$$\text{SOLUCIÓN: } a = b = c = P/3$$

19. **(SEP04)** Una panadería produce dos tipos de pan. El coste de producción del primero es de 50 céntimos la unidad, vendiéndose ésta a x céntimos, con $x \in [50, 100]$. El coste de producción del segundo es de 60 céntimos la unidad, vendiéndose a y céntimos, con $y \in [60, 100]$. Sabiendo que el número de unidades que se vende en un día es $N_1 = 250(y - x)$ del primer tipo y $N_2 = 32000 + 250(x - 2y)$ del segundo tipo, calcula los precios de venta que consiguen maximizar el beneficio.

$$\text{SOLUCIÓN: } (x, y) = (89, 94)$$

20. (DIC04) Consideramos la función de dos variables

$$f(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}.$$

a) Calcula sus derivadas parciales en $(0, 0)$.

SOLUCIÓN: $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0,25$

b) ¿Es diferenciable en $(0, 0)$? Razona tu respuesta.

c) Aproxima el valor de f en el punto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ mediante el plano tangente centrado en el origen.

SOLUCIÓN: $z = 0,25(x + y)$

21. (SEP05) Sea p el polinomio de Taylor de orden 2 de la función f en el punto $(0, 0)$, dado por:

$$p(x, y) = 3 + x^2 + xy + y^2.$$

a) Halla $\nabla f(0, 0)$.

b) Halla $H_f(0, 0)$. ¿Puede deducirse si f presenta en $(0, 0)$ un extremo relativo? Razona la respuesta.

SOLUCIÓN: $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$. Se deduce que es min. rel.

22. (FEB06) Sean $a = (1, -1)$, $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, $v = \frac{1}{2}(1, \sqrt{3})$. Supongamos que la función $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \rightarrow f(x, y) \end{matrix}$ es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^2$ y verifica:

$$f(a) = 1, D_u f(a) = \frac{4}{\sqrt{2}}, D_v f(a) = \sqrt{3} + 1$$

a) Calcular $\nabla f(a)$. Comprobar que $\nabla f(a) = (2, 2)$.

b) Si $g(t) = f(t, \cos \pi t)$ calcula $g'(1)$

c) Calcula $D_w(g \circ f)(a)$, $w = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

SOLUCIÓN: (b) 2 (c) 28/5