Cálculo

(Ingeniería Informática - I. T. Informática de Sistemas)

Boletín II. **Integración de funciones de una variable real**

1. (**SEP01**) Calcula el volumen que genera la curva $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ al girar alrededor del eje OX para $0 \leq x \leq 2$.

2. (**FEB01**) Consideramos la circunferencia de centro $(0,0)$ y de radio 2. Sea r la recta tangente a la semicircunferencia superior en $x = 1$. Calcula, mediante integración, el área limitada por r, la circunferencia y la parte positiva del eje OX. *Solución*: $A = \dfrac{18 - 2\pi\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$

3. Para construir una lámpara se hace girar la gráfica de $y = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}$, con $0 \leq x \leq \dfrac{1}{3}$, en torno al eje OX. Calcula el área de la lámpara. *Solución*: $\pi/27$

4. (**DIC98**) Hallar el área limitada por la gráfica de $f(x) = xe^{-2x}$ y el eje OX en el intervalo $(0,\infty)$. *Solución*: $1/4$

5. (**DIC98**) Hallar los extremos de la función $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt$.

6. Sea $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$, $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Hallar el volumen de la figura que se origina al girar alrededor del eje OX el grafo de f.

7. (**SEP98**) Sea $f(x) = x(x-a)$, $a > 0$, y V_f el volumen engendrado al girar en torno al eje OX la región del plano limitada por dicha función y las rectas $y = 0$ y $x = c$, $c \geq a > 0$. Hallar c para que V_f sea igual al del cono engendrado por el triángulo de vértices $(0,0)$, $(c,0)$ y $(c, f(c))$ al girar en torno al eje OX. *Solución*: $c = 1{,}25a$

8. (**SEP98**) Calcular, si existe, $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$.

9. Sea la función $f(x) = \sqrt{-x\ln x}$ definida en los puntos x para los cuales $-x\ln x \geq 0$. Calcula el volumen del sólido generado al rotar todo su dominio alrededor del eje OX.

10. Calcular:

    a) $I_1 = \displaystyle\int \frac{(2+\tan^2 x)\sec^2 x}{1+\tan^3 x}\,dx$

    b) $I_2 = \displaystyle\int_0^2 \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx$

    c) (**JUN00**) $I_3 = \displaystyle\int_1^\infty e^{-3x}\,dx$ *Solución*: $1/(3e^3)$

11. Sea $f(x) = \cos \pi x$. Calcular $\lim_{n\to\infty} \int_0^n f(x)\, dx$.

12. Calcular $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$. *Solución*: 2

13. (**SEP00**) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \quad , & \text{si } x \in [0,1] \\ 1+x \quad , & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$$

se define $S(x_0)$ como el área limitada por la gráfica de f, el eje OX y la recta $x = x_0$ ($x_0 \in [0,2]$). Se pide:

a) Razonar, sin construir la función, la continuidad de S.

b) Obtener $S(x_0)$ para cada x_0 perteneciente al intervalo $[0,2]$.

c) Supóngase que se repite el procedimiento con la función $S(x)$ en lugar de f, construyéndose de esta forma la función A, donde $A(x_0)$ es el área limitada por la gráfica de S, el eje OX y la recta $x = x_0$. Razonar, sin construir la función, la derivabilidad de A y obtener, además, $A(x_0)$ para todo x_0 perteneciente al intervalo $[0,2]$.

14. (**SEP02**) Hallar un número real a y una función continua f tales que:

$$\int_a^x f(t)\, dt = \cos x - \frac{1}{2}.$$

15. Hallar $f(4)$ si $\int_0^x f(t)\, dt = x \cos(\pi x)$. *Solución*: 1

16. (**JUN04**) Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(t) = \int_0^t \frac{10 \cos x}{\sin x + \cos^2 x + 1} dx.$$

a) Calcula $f(\pi)$.

b) Calcula los máximos y mínimos absolutos de f en $[0,\pi]$, justificando previamente su existencia.

Solución: $f(\pi) = 0$, máximo absoluto $\frac{\pi}{2}$, mínimos absolutos 0 y π.

17. Sea $y = f(x)$ una función continua en $x \in [2,4]$, de la que sabemos que $\min_{x\in[2,4]} f(x) = 3$ y $\max_{x\in[2,4]} f(x) = 6$.

a) ¿Puede valer 15 unidades de superficie el área de la figura comprendida entre la gráfica de $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 4$? *Solución*: No

b) ¿Entre qué valores puede oscilar el área anterior? *Solución*: $6 \le A \le 12$

18. Calcular: $I_1 = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

19. Calcular: $I_2 = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\, dx$ *Solución*: $I_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

20. (**JUN98**) Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2-x+1}$ y el eje de abscisas a la derecha de la recta $x = 0$.

21. (**JUN00**) ¿Qué área tiene la región limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 16$ que se encuentra en semiplano $x > 2$?. ¿Qué volumen genera dicha región del plano al girar alrededor del eje OX?

Solución: $A = 4(4\pi - 3\sqrt{3})/3$; $V = 40\pi/3$

22. Sabiendo que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$, prueba que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$.

23. (**SEP03**) Calcula el volumen de una pirámide de altura h y cuya base es un cuadrado de lado L.

24. (**SEP05**) Una esfera de madera de radio $R = 10$ cm se recubre de una capa de acero de 1 cm de espesor. Calcula, **mediante integración**, el volumen de acero necesario. *Solución*: $V = 1324\pi/3$

25. (**JUN06**) Sea la función F dada por:

$$F(x) = \int_{\pi/2}^{g(x)} f(t)\, dt$$

donde $f(t) = (1 - sin^3 t)e^t$ y $g(x) = \dfrac{\pi}{2} + e^x$.

   a) Determina los puntos críticos de F en el intervalo $[1, ln(5\pi)]$.
   b) Sin calcular F'', clasifica los puntos crtícos y determina los extremos absolutos de F en $[1, ln(5\pi)]$.

Solución: Puntos de inflexión: $ln(2\pi)$ y $ln(4\pi)$. Mín. absol: 1. Máx. absol: $ln(5\pi)$

26. (**SEP06**) Sea la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x & , \quad \text{si } x \in [0, \pi] \\[2ex] \dfrac{x}{\pi - x^2} & , \quad \text{si } x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

   a) ¿Es f integrable en $[0, 2\pi]$? Razona la respuesta.
   b) Calcula el área limitada por el grafo de f, $x = 0$, $x = 2\pi$ e $y = 0$.

27. (**JUN07**) Hallar el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por los semiejes positivos, la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$ y las rectas $y = 2 - 2x/3$ y $x = 3$. *Solución*: $V = \frac{133\pi}{5}$

28. (**JUN07**) Hallar el valor de la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 x^2\, lnx dx$. *Solución*: $\frac{-1}{9}$

29. (**SEP07**) Sea $f(x) = ln\, x^2, x \in [1, e]$. Aplica el teorema del valor medio del cálculo integral, verificando previamente las hipótesis. Calcula el valor del punto en el intervalo $[1, e]$ que satisface el teorema. *Solución*: $c = e^{\frac{1}{e-1}}$

30. **CUESTIONES**. **Razona** la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) El área bajo el grafo de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ en $[-1, 1]$ es finita.

b) (**FEB01**) La función

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } x < 1 \\ 2x - 3, & \text{si } x \in [1, 2] \\ \sin x, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

es integrable en todo intervalo cerrado de $I\!R$.

c) Construimos $g(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\, dt$. Entonces $g'(x) = 2x\, f(x^2)$.

d) Consideramos $f(x) = 1 - x^2$ y las particiones $P = \{-5, 1, 2\}$ y $Q = \{-5, 0, 1, 2\}$. Entonces, $L(P, f) \leq U(Q, f)$.

e) Si f es integrable en $I = [7, 9]$ y $3 \leq f(x) \leq 9$, $\forall x \in I$, entonces $6 \leq \displaystyle\int_7^9 f(x)\, dx \leq 18$.

f) (**DIC 03**) Si $F(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x^2} \sqrt{t^2 + 1}\, dt$ entonces $F'(x) = 2x\sqrt{x^4 + 1}$.

g) (**FEB 04**) El área bajo el grafo de la función $f(x) = \dfrac{e^{-\ln x}}{x}$ en el intervalo $[1, +\infty)$ es infinita.