

CÁLCULO

Boletín III. Ecuaciones diferenciales

1. Resuelve los problemas de valores iniciales:

a) (DIC01) $\begin{cases} (5-x)\sqrt{3-x} dz = dx \\ z(3) = -1 \end{cases}$ SOLUCIÓN: $z = -\left(1 + \sqrt{2} \arctan \sqrt{\frac{3-x}{2}}\right)$

b) (DIC98) $\begin{cases} xy' - 3y = x^5 \\ y(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$ SOLUCIÓN: $y = x^3 + 0,5x^5$

c) (JUN01) $\begin{cases} y' = \frac{x \sec(\frac{y}{x}) + y}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$ SOLUCIÓN: $y = x \arcsin(\ln|x|)$

d) (SEP01) $\begin{cases} y' + y \cos x = \sin x \cos x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ SOLUCIÓN: $y = \sin x - 1 + 2e^{-\sin x}$

e) (FEB99) $\begin{cases} y' = \frac{x+y}{x-y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$ SOLUCIÓN: $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

f) (SEP98) $\begin{cases} y' + y = \sin x \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$ SOLUCIÓN: $y = 0,5(e^{\pi-x} + \sin x - \cos x)$

g) $\begin{cases} e^{-\cos x} \left(y' + y \frac{\cos x}{\sin x} \right) = 5 \\ y(\frac{\pi}{2}) = -4 \end{cases}$ SOLUCIÓN: $y = (1 - 5e^{\cos x})/\sin x$

h) $\begin{cases} (3x^2 + y^3 e^y) dx + (3xy^2 e^y + xy^3 e^y + 3y^2) dy = 0 \\ y(2) = 0 \end{cases}$ SOLUCIÓN: $x^3 + xy^3 e^y + y^3 = 8$

2. (SEP03) Un método para resolver la ecuación diferencial (llamada ecuación logística):

$$\frac{dP}{dt} = KP \left(1 - \frac{P}{L} \right) ,$$

donde K y L son constantes, es realizar el cambio de variable $P = 1/u$ y resolverla después.

a) Reescribe la ecuación diferencial logística en términos de u y de t , y resuélvela.

b) Usa el resultado obtenido en el apartado anterior para encontrar la solución P como función de t .
SOLUCIÓN: $P(t) = Le^{kt}/(C + e^{kt})$

3. Resuelve la ecuación $y''' - y'' - 5y' - 3y = 0$ con las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$; $y''(0) = 8$.

SOLUCIÓN: $y = (2x - 0,5)e^{-x} + 0,5e^{3x}$

4. (JUN05) Calcula la solución general de la e.d. $y''' + y' = 5x$

SOLUCIÓN: $y = A + B \cos x + C \sin x$

5. Resuelve la ecuación $a'' - 2a' + 5a = 0$ verificando $a(0) = 1$; $a'(0) = 2$.

SOLUCIÓN: $a(x) = 0,5e^x(2 \cos 2x + \sin 2x)$

6. (FEBO3) Calcular la solución general de la ecuación diferencial: $y''' - y'' - 2y' = 4 \sin 2x + 2e^{-x}$.

SOLUCIÓN: $y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x} + 0,1(\sin 2x + 3 \cos 2x) + 2x e^{-x}/3$

7. Cuando se disuelve azúcar en agua, la cantidad A que permanece sin disolver después de t minutos satisface la ecuación $\frac{dA}{dt} = -KA$, donde $K > 0$. Si el 25% se disuelve después de un minuto, ¿cuánto tiempo hace falta para que se disuelva la mitad? SOLUCIÓN: $t \approx 2,41$ min

8. Un circuito RL tiene una f.e.m. $e(t) = 4 \sin(t)$ voltios, una resistencia de 100Ω y una bobina de 4 Henrios. Sabiendo que no tiene corriente inicial, hallar la intensidad de corriente en cada instante.

SOLUCIÓN: $i(t) = [e^{-25t} + 25 \sin t - \cos t]/626$

9. Según la ley de Newton, el enfriamiento de un cuerpo en una corriente de aire es proporcional a la diferencia de temperaturas entre el cuerpo y el aire. Si la temperatura del aire es de 30°C y el cuerpo pasa de 100°C a 70°C en 15 min, determinar al cabo de cuánto tiempo estará a 40°C .

SOLUCIÓN: $t = 52,16$ min

10. Se disuelven inicialmente 50 kg de sal en un gran tanque que contiene 300 l de agua. Se bombea salmuera al tanque a razón de 3 l/min, y luego la solución mezclada se bombea fuera del tanque también a razón de 3 l/min.

a) Si la concentración de la solución que entra es de $\frac{1}{3}$ kg/l, determinar la cantidad de sal que hay en el tanque en un instante dado. SOLUCIÓN: $y(t) = 100 - 50e^{-0,01t}$ kg.

b) Calcular la cantidad de sal que hay después de 50 min. SOLUCIÓN: $y = 69,67$ kg

c) Calcular la cantidad de sal que hay en el tanque después de un tiempo suficientemente largo. SOLUCIÓN: $y_\infty = 100$ kg

11. (FEBO4) Colgamos una masa m de uno de los dos extremos de un muelle y al aplicar una fuerza $f(t)$ la ecuación que describe el desplazamiento $x(t)$ en el instante t es:

$$x'' + 2x' + x = f(t).$$

a) Resuelve la ecuación diferencial para $f(t) = 0$ y las condiciones iniciales $\{x(0) = 1, x'(0) = 1\}$. Calcula $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$.

b) Resuelve la ecuación diferencial para la fuerza $f(t) = 5t$, con las condiciones iniciales del apartado anterior. SOLUCIÓN: $x(t) = 11e^{-t} + 7te^{-t} - 10 + 5t$

12. (JUN03) En cierto país bárbaro, dos tribus vecinas se han odiado mutuamente desde tiempo inmemorial. Sus poderes son fuertes y una maldición solemne pronunciada por el hechicero de la primera tribu vuelve locos a los miembros de la segunda, conduciéndoles al asesinato y al suicidio.

Si la variación de población por unidad de tiempo de la segunda tribu es $-\sqrt{P}$ personas por semana, y si su población cuando se profiere la maldición es de 676 personas, ¿cuánto tiempo tardará en extinguirse la segunda tribu? SOLUCIÓN: 52 semanas

13. (FEBO6) Resolver el problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} y' + \frac{3x}{1-x^2}y &= (x-1)(1-x^2) \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

14. (DIC07) Encuentra la solución general de la ecuación diferencial:

$$y'' - y = (2 - 4x)e^{-x} + 10 \cos(2x)$$

SOLUCIÓN: $y(x) = Ae^x + Be^{-x} + x^2 e^{-x} - 2 \cos(2x)$