CÁLCULO

Boletín IV. **Funciones reales de varias variables**

1. **Razona** la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

   a) Si $\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x^2)=0$, entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

   b) (**JUN03**) La norma del vector gradiente de la función $f(x,y)=xe^{2y-x}$ en el punto P de coordenadas $(2,1)$ es 4.

   c) Sea $f: A\subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua, donde $A=\{(x,y)\,/\,y^2\le 4x\}$. Entonces f alcanza máximo y mínimo sobre A.

   d) La función $z=(y-ax)(y-bx)$, donde a y b son dos constantes distintas entre sí, no tiene extremos relativos.

   e) Sea $f:\mathbb{R}^2-\{(1,2)\}\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

   $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)=2$$

   Entonces se verifica: $\lim_{y\to 2} f(1,y)=2$

   f) (**FEB04**) La función:

   $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

   es continua en $(0,0)$.

   g) (**FEB04**) Consideramos dos funciones genéricas:

   $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ & (x,y) & \longrightarrow & f(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y),f_3(x,y))^T\end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (u,v,w) & \longrightarrow & g(u,v,w)\end{array}$$

   Si llamamos $h=g\circ f$, entonces:

   $$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f_3}{\partial x} \quad .$$

2. (**DIC01**) Sea:

   $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

   a) Hallar $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

   b) ¿Se verifica la igualdad: $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$? Justifica la respuesta.

3. (**FEB99**) Dada la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

se pide:

   a) Determinar el valor de a de forma que f sea continua en el origen. Solución: $a = 0$

   b) Para este valor de a, calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Solución: 0

   c) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ en $(1,0)$.
   Solución: $z = 0{,}25\pi + x - 1$

4. Sea f una función de dos variables que admite derivadas parciales de primer y segundo orden continuas en todo $I\!R^2$. **Razona** la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:

   a) Si (x_0, y_0) es un extremo condicionado de f, entonces el hessiano de f en dicho punto es estrictamente mayor que cero.

   b) Si la derivada parcial segunda de f respecto de x dos veces es estrictamente negativa, entonces (x_0, y_0) es un máximo relativo de f.

   c) La función f alcanza sus valores extremos sobre cualquier círculo del plano.

5. (**FEB98**) Hallar los extremos absolutos de $f(x,y) = xy$ sobre la elipse $x^2 + y^2 + xy = 4$.
   Solución: $f_{\max} = 4/3$, $f_{\min} = -4$

6. (**FEB01**) Sea:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + 2y & \text{si } x = 0 \text{ ó } y = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Hallar $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.

   b) Comprobar que las únicas derivadas direccionales de f en el punto $(0,0)$ que existen son las derivadas en las direcciones de los ejes coordenados.

7. La distancia de un punto P a un plano es la mínima distancia de P a cada uno de los puntos del plano. Hallar la distancia de $P = (0,3,4)$ al plano $x + 2y + z = 5$.

8. (**SEP98**) Si se gastan x millones de euros en mano de obra e y millones de euros en equipos, la producción de una factoría será: $Q(x,y) = 50x^{2/5}y^{3/5}$ unidades. Si se dispone de un total de 150 millones de euros, hallar cómo se deben distribuir entre trabajo y equipamiento para que la producción sea máxima. Solución: $x = 60$, $y = 90$

9. (**SEP01**) Hallar los puntos críticos de $f(x,y) = x^3 - 2y^2 - 2y^4 + 3x^2y$.
   Solución: $M_r = f(-2,1)$, pto. silla: $(-1,05)$ y $(0,0)$

10. Hallar los extremos absolutos de $f(x,y) = -5x^2 + 5xy + 5y^2 - 30x$ sobre el rectángulo $C = \{(x,y) \,/\, 0 \leq x \leq 5,\ -2 \leq y \leq 2\}$.

11. (**JUN00**) Analiza los puntos críticos de la función $z = (x^2 - y^2)e^{\frac{-x^2-y^2}{2}}$, encontrando sus extremos.
   Solución: pto silla: $(0,0)$; $M_r = f(\sqrt{2},0) = f(-\sqrt{2},0)$; $m_r = f(0,\sqrt{2}) = f(0,-\sqrt{2})$

12. (**FEB00**) Calcular los extremos absolutos, si existen, de $f(x,y) = x^3 + y^3$ en el conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 4\,,\, -1 \leq y\}$.

13. (**FEB02**) La intensidad de luz en una habitación en la que se sitúa una lámpara de 300 W viene dada, en cada punto (x,y), por la función:

$$i(x,y) = \frac{300}{4\pi\,[(x-5)^2 + (y-2)^2 + 9]}$$

   a) Calcula los puntos en los que la intensidad de luz es $3/\pi$. Represéntalos.

   b) Si estamos situados en el punto de coordenadas $(0,4)$, ¿cuál es la dirección que debemos seguir para incrementar la intensidad de luz lo máximo posible? Solución: $\vec{v} = (5,-2)$

   c) Si la habitación ocupa el rectángulo $D = [0,10] \times [0,4]$, obtén los puntos de máxima y mínima intensidad, demostrando previamente su existencia.
   Solución: $f_{\max} = f(5,2)$; $f_{\min} = f(0,0) = f(0,4) = f(10,0) = f(10,4)$

14. (**FEB03**) Dados el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \geq x^2 - 1, y \leq 2x - 0{,}5\}$ y la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^2$, se pide:

   a) Dibuja el conjunto A. ¿Es compacto?

   b) Razona si f tiene extremos absolutos sobre A y, en caso afirmativo, calcúlalos.

15. (**FEB03**) Sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $(0,0)$ y tal que $g(0,0) = 1$. Construimos la función f dada por:

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)\, g(x,y).$$

   Se pide calcular:

   a) $D_v f(0,0), \quad v \in \mathbb{R}^2$

   b) $\nabla f(0,0)$.

16. (**JUN03**) Un agente de bolsa invierte 120000 EUR en acciones de dos empresas. Si la acción de la empresa A vale 30 EUR y la de la empresa B vale 10 EUR, calcula el número de acciones que debe comprar para maximizar la función $f(x,y) = 3\ln(x+1) + \ln(y+1)$, sabiendo que x es el número de acciones que compra de A, e y el de acciones que compra de B.

17. (**SEP03**) Dada la función de dos variables $f(x,y) = x \arctan(y/x)$, razona la existencia de plano tangente en el punto $(1,1)$. Calcúlalo.

18. (**FEB04**) El valor de una finca triangular viene dado por:

$$\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2} - a\right)\left(\frac{P}{2} - b\right)\left(\frac{P}{2} - c\right),$$

   donde a, b y c son las longitudes de sus lados y P es el perímetro de la finca. Calcula las longitudes de los lados de la finca triangular de mayor valor que podemos cercar con un alambre de longitud dada P. Solución: $a = b = c = P/3$

19. (**SEP04**) Una panadería produce dos tipos de pan. El coste de producción del primero es de 50 céntimos la unidad, vendiéndose ésta a x céntimos, con $x \in [50,100]$. El coste de producción del segundo es de 60 céntimos la unidad, vendiéndose a y céntimos, con $y \in [60,100]$. Sabiendo que el número de unidades que se vende en un día es $N_1 = 250(y-x)$ del primer tipo y $N_2 = 32000 + 250(x - 2y)$ del segundo tipo, calcula los precios de venta que consiguen maximizar el beneficio.
   Solución: $(x,y) = (89,94)$

20. (**JUN04**) Consideramos la función de dos variables

$$f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}.$$

   a) Calcula sus derivadas parciales en $(0,0)$. SOLUCIÓN: $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0{,}25$
   b) ¿Es diferenciable en $(0,0)$? Razona tu respuesta.
   c) Aproxima el valor de f en el punto $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ mediante el plano tangente centrado en el origen.
   SOLUCIÓN: $z = 0{,}25(x+y)$

21. (**SEP05**) Sea f la función dada por:

$$f(x,y) = 3 + x^2 + xy + y^2\,.$$

   a) Halla $\nabla f(0,0)$.
   b) Halla $H_f(0,0)$. ¿Puede deducirse si f presenta en $(0,0)$ un extremo relativo? Razona la respuesta.
   SOLUCIÓN: $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Se deduce que es min. rel.

22. (**FEB06**) Sean $a = (1,-1)$, $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $v = \frac{1}{2}(1,\sqrt{3})$. Supongamos que la función $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \to f(x,y) \end{array}$ es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^2$ y verifica:

$$f(a) = 1,\ D_u f(a) = \frac{4}{\sqrt{2}},\ D_v f(a) = \sqrt{3}+1$$

   a) Calcular $\nabla f(a)$. Comprobar que $\nabla f(a) = (2,2)$.
   b) Si $g(t) = f(t, \cos \pi t)$ calcula $g'(1)$
   c) Calcula $D_w\,(g \circ f)\,(a)$, $\ w = \left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ SOLUCIÓN: (b) 2 (c) 28/5

23. (**JUN06**) Sea la función $f(x,y) = x^3 - 2xy + y^2$.

   a) Escribe la matriz jacobiana en un punto (x,y).
   b) Determina y clasifica sus puntos críticos.
   c) Calcula la derivada direccional de f en el punto $c = (1,2)$ en la dirección de $v = (\frac{3}{5},\frac{4}{5})$.
   d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(y,x)}{ln|f(0,x^2+y^2)|}$
   SOLUCIÓN: (a) $(3x^2-2y, 2(y-x))$ (b) $(0,0)$ punto silla $(2/3,2/3)$ min. rel. (c) 1 (d) 0