EXAMEN CÁLCULO - INFORMÁTICA

Febrero 2009

Ejercicio 1 .- (1 punto)

La transformada de Laplace de una función $f(x)$ se define como $\hat{f}(x) = \int_0^{\infty} f(t)\, dt$.

Demostrar que para $f(t) = t$ la transformada de Laplace vale $\hat{f}(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Solución

$$\begin{array}{ll} u = t & \mid \; du = dt \\ dv = e^{-xt}\, dt & \mid \; v = -\dfrac{1}{x}\, e^{-xt} = \end{array}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \int_0^{\infty} t\, e^{-xt}\, dt = \lim_{k\to\infty} \int_0^{k} t\, e^{-xt}\, dt \quad \overbrace{=} \\ &= \lim_{k\to\infty} \left[-\frac{t}{x}\, e^{-xt} \Big)_0^k + \int_0^k \frac{1}{x}\, e^{-xt}\, dt \right] = \lim_{k\to\infty} -\frac{k}{x}\, e^{-xk} - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{x^2}\, e^{-xt} \Big)_0^k = \\ &= -\lim_{k\to\infty} \frac{1}{x^2}\, e^{-kt} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\,. \end{aligned}$$

Luego $\boxed{\hat{f}(x) = \dfrac{1}{x^2}}$

Ejercicio 2 .- (1 punto)

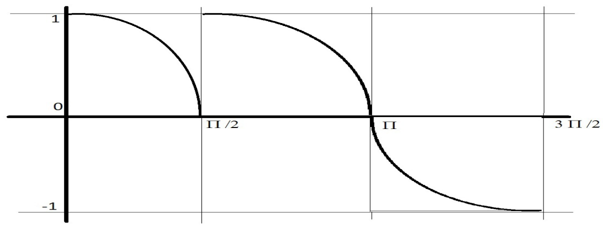
Se considera la función definida por: $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } \; 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} x & \text{si } \; \dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

a) ¿Es f integrable en $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

b) Para la partición $P = \left\{0, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$ calcular $U(P, f)$ y $L(P, f)$.

Solución a)

Gráficamente:



Como f es integrable en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ y en $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, ya que es continua en cada intervalo, entonces f es integrable en $\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Solución b)

Por definición de suma superior e inferior de Riemann:

$$U(P,f) = \sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} f(x)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-0\right) + \sup_{x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]} f(x)\cdot\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right) = 1\cdot\frac{\pi}{2}+1\cdot\pi = \frac{3\pi}{2}\,.$$

$$L(P,f) = \inf_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} f(x)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-0\right) + \inf_{x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]} f(x)\cdot\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right) = 0\cdot\frac{\pi}{2}-1\cdot\pi = -\pi\,.$$

Ejercicio 3 .- (1.25 puntos)

Calcular y clasificar los puntos críticos de la función $f(x,y) = -xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.

En primer lugar se calculan los puntos críticos.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y\,e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + x^2y\,e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = y\,e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(-1+x^2) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x\,e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + xy^2\,e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = x\,e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(-1+y^2) = 0$$

De la primera resulta $\begin{cases} y=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

Sustituyendo en la segunda:

Si $y=0$, entonces $x=0$, por lo que resulta el punto crítico $P_1(0,0)$.

Si $x=1$ entonces $y=\pm1$ por lo que resultan los puntos críticos $P_2(1,1)$ y $P_3(1,-1)$.

Si $x=-1$ entonces $y=\pm1$ por lo que resultan los puntos críticos $P_4(-1,1)$ y $P_5(-1,-1)$.

Para calcular los puntos críticos se calcula la matriz hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xy(x^2-3)\,e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} & -(x^2-1)(y^2-1)\,e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\ -(x^2-1)(y^2-1)\,e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} & -xy(y^2-3)\,e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \end{pmatrix}$$

En cada uno de los puntos críticos:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |Hf(0,0)|<0 \Rightarrow \text{ no es extremo relativo.}$$

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 2\,e^{-1} & 0 \\ 0 & 2\,e^{-1} \end{pmatrix} \Rightarrow |Hf(1,1)|>0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)>0 \Rightarrow \text{ es un mínimo relativo.}$$

$$Hf(1,-1) = \begin{pmatrix} -2\,e^{-1} & 0 \\ 0 & -2\,e^{-1} \end{pmatrix} \Rightarrow |Hf(1,-1)|>0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1)<0 \Rightarrow \text{ es un máximo relativo.}$$

$$Hf(-1,1) = \begin{pmatrix} -2\,e^{-1} & 0 \\ 0 & -2\,e^{-1} \end{pmatrix} \Rightarrow |Hf(-1,1)|>0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1)>0 \Rightarrow \text{ es un máximo relativo.}$$

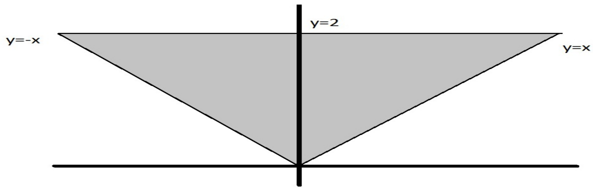
$$Hf(-1,-1) = \begin{pmatrix} 2\,e^{-1} & 0 \\ 0 & 2\,e^{-1} \end{pmatrix} \Rightarrow |Hf(-1,-1)|>0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1)>0 \Rightarrow \text{ es un mínimo relativo.}$$

Ejercicio 4 .- (1.25 puntos)

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = 5+4x-2x^2+3y-y^2$ en la región del espacio delimitada por las rectas $y=2$, $y=x$ y $y=-x$ en el semiplano superior.

Solución

Representando



Como f es continua en el recinto R del enunciado, el cual es compacto, por el teorema de Weierstrass, f alcanzo el máximo y el mínimo absolutos en R.

En primer lugar se calculan los puntos críticos en el interior de R.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4 - 4x = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)3 - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto se tiene un primer punto crítico $P_1\left(1, \frac{3}{2}\right)$, el cual pertenece al interior de R.

A continuación se calculan los puntos críticos en la frontera de R, la cual, como se ve en el dibujo, tiene tres tramos.

En $y = x$ con $0 < x < 2$, se tiene $f(x,x) = -3x^2 + 7x + 5 = g(x)$; derivando $g'(x) = -6x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{6} \Rightarrow y = \frac{7}{6}$, por lo que se tiene el punto crítico $P_2\left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}\right)$.

En $y = -x$ con $-2 < x < 0$, se tiene $f(x,-x) = -3x^2 + x + 5 = g(x)$; derivando $g'(x) = -6x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$ lo cual no es válido.

En $y = 2$ con $-2 < x < 2$, se tiene $f(x,2) = -2x^2 + 4x + 7 = g(x)$; derivando $g'(x) = 4 - 4x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$, por lo que se tiene el punto crítico $P_3\left(1,2\right)$.

Finalmente se evalúan los puntos críticos anteriores junto con los de las esquinas:

$$f\left(1, \frac{3}{2}\right) = \frac{37}{4} \qquad f\left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}\right) = \frac{109}{12} \qquad f\left(1,2\right) = 9 \qquad f(2,2) = 7 \qquad f(-2,2) = -9\,.$$

Luego el máximo absoluto es $\frac{37}{4}$ y el mínimo absoluto -9

Ejercicio 5 .- (1 punto)

a) Sea la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$**. Calcular** α **para que** f **sea continua en** $(0,0)$**.**

b) Sea $z = x^3y - 3xy^4$**, con** $x = \cos t$**,** $y = \operatorname{sen} t$**. Calcular** $\frac{dz}{dt}(0)$**.**

Solución a)

Se tiene un punto problemático por lo que tiene que ocurrir que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.

Se hace el límite por coordenadas polares.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=r\cos\theta\\ y=r\,\text{sen}\,\theta}} f(x,y) = \lim_{r\to 0^+} \frac{r\cos\theta r^3 \,\text{sen}^3\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\,\text{sen}^2\theta} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^4\,\text{sen}^3\theta\cos\theta}{r^2(sen^2\theta+\cos^2\theta)} = \lim_{r\to 0^+} r^2\,\text{sen}^3\theta\cos\theta = 0\,.$$

Luego el límite, si existe, vale 0. Se utiliza el criterio de la función mayorante:

$$\left|r^2\,\text{sen}^3\theta\cos\theta\right| \le r^2,\ \forall\,\theta\in[0,2\pi),\ \text{con}\ \lim_{r\to 0^+} r^2 = 0\,.$$

Luego el límite existe y vale 0. Por lo tanto, f es continua en el punto $(0,0)$ si $\alpha = 0$.

Solución b)

Se tiene $t \longrightarrow \overbrace{(x,y)}^{\substack{x=\cos t\\ y=\text{sen}\,t}} \longrightarrow z(x,y)$

Por la regla de la cadena

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = (3x^2y-3y^4)(-\,\text{sen}\,t) + (x^3-12xy^3)\cos t = \\ &= (3\cos^2 t\,\text{sen}\,t - 3\,\text{sen}^4 t)(-\,\text{sen}\,t) + (\cos^3 t - 12\cos t\,\text{sen}^3 t)\cos t\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Luego sustituyendo, } \frac{dz}{dt}(0) = 1}$$

Ejercicio 6 .- (1.25 puntos)

La velocidad de propagación de un virus de constante k en una red informática de m ordenadores viene dada por la ecuación diferencial $\dfrac{dx}{dt} = kx(m-x)$. Calcular la cantidad de ordenadores infectados en el instante t.

Solución

Se tiene la E.D.O. $\dfrac{dx}{dt} = kmx + kx^2$, que es una ecuación de Bernoulli. Para resolverla se hace el cambio de variable $x = \dfrac{1}{z}$, por lo que $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{z^2}\dfrac{dz}{dt}$. Sustituyendo en la ecuación se tiene:

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dt} = km\frac{1}{z} - k\frac{1}{z^2} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -kmz + k \Rightarrow \frac{dz}{dt} + kmz = k$$

que es una E.D.O. lineal, la cual se puede escribir $(k-kmz)\,dt - dz = 0$.

El factor de integración es $\mu(t) = \displaystyle\int e^{km\,dt} = e^{kmt}$.

Multiplicando la ecuación por el factor de integración resulta $(k-kmz)\,e^{kmt}\,dt - e^{kmt}\,dz = 0$, que es una ecuación diferencial exacta. La solución de la ecuación es $f(t,z)=0$, siendo f una función tal que $\dfrac{\partial f}{\partial t} = (k-kmz)\,e^{kmt}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -e^{kmt}$.

Como $\dfrac{\partial f}{\partial z}(t,z) = -e^{kmt} \Rightarrow f(t,z) = \displaystyle\int -e^{kmt}\,dz + g(t) \Rightarrow f(t,z) = -z\,e^{kmt} + g(t)$.

Para calcular $g(t)$ se utiliza que $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,z) = (k - kmz)\, e^{kmt}$. Así:

$$-kmz\, e^{kmt} + g'(t) = ke^{kmt} - kmz\, e^{kmt} \Rightarrow g'(t) = k\, e^{kmt} \Rightarrow g(t) = \frac{1}{m}\, e^{kmt} + C\,.$$

Así la solución viene dada por $-z\, e^{kmt} + \dfrac{1}{m}\, e^{kmt} + C = 0 \Rightarrow z = \dfrac{1}{m} + \dfrac{c}{e^{kmt}} = \dfrac{1}{m} + C\, e^{-kmt}$.

Deshaciendo el cambio de variable, se tiene que la solución de la ecuación es decir, el número de ordenadores infectados en un instante t es:

$$\boxed{x = \frac{m}{1 + mCe^{-kmt}}}$$

Ejercicio 7 .- **(1.25 puntos)**

Resolver los problemas de valor inicial:

$$a) \quad \left.\begin{array}{c} y'' + 8y' - 9y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{array}\right\} \qquad b) \quad \left.\begin{array}{c} y'' + 8y' - 9y = t\, e^{t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{array}\right\}$$

Solución a)

Se tiene un E.D.O. de orden superior, de coeficientes constantes, homogénea. El polinomio característico es $\lambda^2 + 8\lambda - 9 = 0$, cuyas raíces son $\lambda = 1$ y $\lambda = -9$.

Así, la solución general de la ecuación es $y_{GH}(x) = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{-9x}$.

Los parámetros C_1 y C_2 se calculan utilizando las condiciones iniciales.

De $y(0) = 1$ resulta $C_1 + C_2 = 1$. Además, como $y'(x) = C_1\, e^{x} - 9C_2\, e^{-9x}$, $y'(0) = C_1 - 9C_2 = 0$.

Resolviendo el sistema resulta $C_1 = \dfrac{9}{10}$ y $C_2 = \dfrac{1}{10}$, por lo que la solución del problema de valor inicial es

$$\boxed{y(x) = \frac{9}{10}\, e^{x} + \frac{1}{10}\, e^{-9x}}$$

Solución b)

La solución general de la ecuación viene dada por la suma de la solución general de la homogénea y de una solución particular de la completa. La primera ya se tiene calculada en el apartado anterior. La segunda es de la forma $y(x) = (A + Bx)x\, e^{x} = Ax\, e^{x} + Bx^2\, e^{x}$. Se utiliza que es solución.

$$\begin{aligned} y(x) &= Ax\, e^{x} + Bx^2 e^{x} \\ y'(x) &= A\, e^{x} + Axe^{x} + 2Bxe^{x} + Bx^2 e^{x} \\ y''(x) &= 2Ae^{x} + 2Be^{x} + Axe^{x} + 4Bxe^{x} + Bx^2 e^{x} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$2Ae^{x} + 2Be^{x} + Axe^{x} + 4Bxe^{x} + Bx^2e^{x} + 8Ae^{x} + 8Axe^{x} + 16Bxe^{x} + 8Bx^2e^{x} - 9Axe^{x} - 9Bx^2e^{x} = xe^{x}$$

Simplificando $10Ae^{x} + 2Be^{x} + 20Bxe^{x} = xe^{x}$.

Resulta el sistema formado por $10A + 2B = 0$ y $20B = 1$, de donde $B = \dfrac{1}{20}$ y $A = -\dfrac{1}{100}$.

Luego, la solución general de la completa es $y(x) = C_1e^{x} + C_2e^{-9x} - \dfrac{1}{100}x\, e^{x} + \dfrac{1}{20}x^2\, e^{x}$.

Aplicando las condiciones iniciales resulta: $C_1 = \dfrac{899}{1000}$, $C_2 = \dfrac{101}{1000}$, por lo que la solución del problema es:

$$\boxed{y(x) = \frac{899}{1000}\, e^{x} + \frac{101}{1000}\, e^{-9x} - \frac{1}{100}x\, e^{x} + \frac{1}{20}x^2 e^{x}}$$