
EXAMEN CÁLCULO - INFORMÁTICA

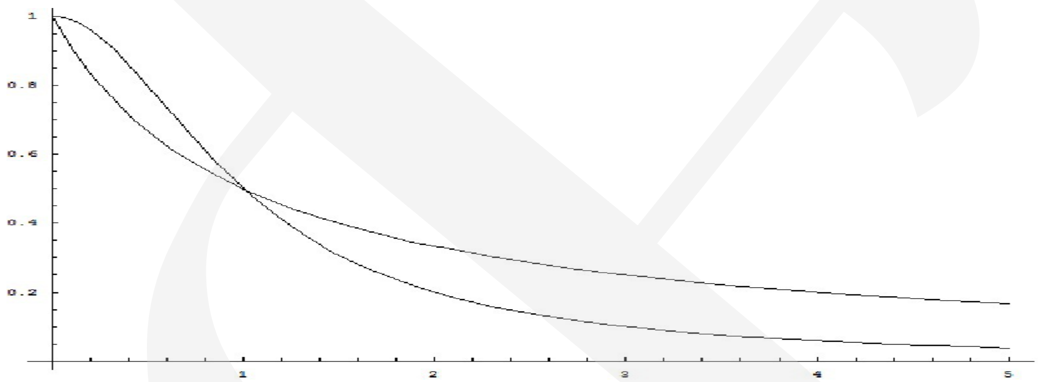
Febrero 2010

Ejercicio 1 .- (1.5 pt)

Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, hállese el área de la región no acotada limitada por las gráficas de las funciones anteriores, para $x > 0$.

Solución

Ambas funciones en $x = 0$ valen 1, son decrecientes y tienden a 0 cuando x tiende a ∞. Entre 0 y 1, $\dfrac{1}{1+x^2} \geq \dfrac{1}{1+x}$, pero a partir de 1 la desigualdad anterior se invierte. Así, gráficamente:



A partir de $x = 1$, la que está por encima es $\dfrac{1}{1+x}$.

$$\begin{aligned}
A &= \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x}\,dx - \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x}\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_1^{k} \frac{1}{1+x}\,dx - \lim_{k\to\infty} \int_1^{k} \frac{1}{1+x}\,dx = \\
&= \lim_{k\to\infty} \ln|1+x|]_1^k - \lim_{k\to\infty} \arctan x]_1^k = \lim_{k\to\infty} \ln|1+k| - \ln 2 - \lim_{k\to\infty} \arctan k + \arctan 1 = \\
&= \infty - \ln 2 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \infty\,.
\end{aligned}$$

Luego $\boxed{A = \infty}$

Ejercicio 2 .- (1.75 pt)

Se considera la función $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$

a) **Razónese en qué puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ la dirección de máximo crecimiento de f es la del vector $(1, 0)$.**

b) **Determínese en qué dirección se anula la derivada direccional de f en el punto $(1, 0)$.**

c) **Estúdiese si f presenta extremos relativos en $\mathbb{R}^2$ y en caso afirmativo, hállense.**

Solución a)

La dirección de máximo crecimiento viene dada por el vector gradiente.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \operatorname{sen} y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos y \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\nabla} f(x,y) = (\operatorname{sen} y, x\cos y)\ .$$

Para que tenga la dirección $(1,0)$ ha de ocurrir:

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen} y \neq 0 \Rightarrow y \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ y \\ x\cos y = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ó} \\ \cos y = 0 \Rightarrow y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \end{array}}$$

Solución b)

$$D_{(u_1,u_2)} f(1,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\cdot u_2 = 0\cdot u_1 + 1\cdot u_2 = u_2$$

Para que se anule la derivada direccional en el punto $(1,0)$ tiene que ocurrir que $\boxed{u_2 = 0}$

Solución c)

En primer lugar se calculan los puntos críticos: $\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} y = 0 \\ x\cos y = 0 \end{array}\right\}$.

De la primera, $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Sustituyendo en la segunda: $x\cos(k\pi) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Luego los puntos críticos son $(0, k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Se calcula la matriz hessiana: $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \cos y \\ \cos y & -x\operatorname{sen} y \end{pmatrix}$.

En los puntos críticos $|Hf(0,k\pi)| = \begin{vmatrix} 0 & \cos(k\pi) \\ \cos(k\pi) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{vmatrix} < 0.$

Por lo tanto $\boxed{\text{no hay extremos relativos}}$

Ejercicio 3 .- (1.5 pt)

Sea $f(x,y) = x^2 y$.

a) Calcúlese el plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(1,2)$.

b) Aplíquese el teorema de Taylor de orden 2 en el punto $(1,2)$.

Solución a)

Como $z = f(x,y)$, $f(1,2) = 2$. Se considera la función $F(x,y,z) = z - x^2 y$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) &= -2xy & \Rightarrow\quad & \frac{\partial F}{\partial x}(1,2,2) = -4\\
\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) &= -x^2 & \Rightarrow\quad & \frac{\partial F}{\partial y}(1,2,2) = -1\\
\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) &= 1 & \Rightarrow\quad & \frac{\partial F}{\partial x}(1,2,2) = 1
\end{aligned}$$

Luego el plano tangente es: $-4(x-1)-1(y-2)+(z-2)=0$, es decir $\boxed{4x+y-z-4=0}$

Solución b)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 4 \quad | \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 1\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) = 4 \quad | \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2) = 2\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) = 0
\end{aligned}$$

Luego el polinomio de Taylor viene dado por:

$$\boxed{P_2(x,y) = 2 + \frac{1}{1!}\left[4(x-1)+1(y-2)\right] + \frac{1}{2!}\left[4(x-1)^2+4(x-1)(y-2)\right]}$$

Ejercicio 4 .- (1.75 pt)

Resuélvase la ecuación diferencial $y''' - 4y'' + 4y' = 1 + e^{2x}$.

Solución

En primer lugar se busca una solución general de la ecuación homogénea. Para ello, se calculan las raíces del polinomio característico.

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 & \text{simple}\\ \lambda = 2 & \text{doble}\end{cases}$$

Con esto, la solución general de la homogénea es $y_{GH} = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x}$.

A continuación se busca la solución particular de la completa, que es de la forma $y_{PC}(x) = Ax + Bx^2e^{2x}$.

Derivando sucesivamente:

$$y'_{PC}(x) = A + 2Bx^2e^{2x} + 2Bxe^{2x} \qquad y''_{PC}(x) = 4Bx^2e^{2x} + 8Bxe^{2x} + 2Be^{2x}$$
$$y'''_{PC}(x) = 8Bx^2e^{2x} + 24Bxe^{2x} + 12Be^{2x}$$

Sustituyendo en la ecuación resulta:

$$8Bx^2e^{2x} + 24Bxe^{2x} + 12Be^{2x} - 16Bx^2e^{2x} - 32Bxe^{2x} - 8Be^{2x} + 4A + 8Bx^2e^{2x} + 8Bxe^{2x} = 1 + e^{2x}$$

Realizando los cálculos resulta $A = B = \dfrac{1}{4}$, por lo que $y_{PC}(x) = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}x^2e^{2x}$.

Así, la solución de la ecuación es:

$$\boxed{y(x) = c_1 + c_2e^{2x} + c_3xe^{2x} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2e^{2x}}$$

Ejercicio 5 .- **(1.5 pt)**

Determínese una función f tal que $f(0) = 3$ y $f'(x) = f(x) + x$.

Solución

Se trata de resolver la E.D.O. $\dfrac{dy}{dx} = y + x$, es decir $\dfrac{dy}{dx} - y = x$, que es lineal.

Se considera como factor integrante $\mu(x) = ce^{\int p(x)\,dx} = ce^{\int -dx} = ce^{-x}$.

Escribiendo la E.D.O. en la forma canónica $dy + (-y - x)\,dx = 0$ y multiplicando por el factor integrante, resulta:

$$e^{-x}\,dy + (-y - x)\,e^{-x}\,dx = 0$$

que es una E.D.O. exacta.

Se busca una solución de la forma $g(x, y) = 0$ donde g es una función tal que $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = (-y - x)e^{-x}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = e^{-x}$.

Como $\dfrac{\partial g}{\partial y} = e^{-x} \Rightarrow g(x, y) = \displaystyle\int e^{-x}\,dy + \varphi(x) = e^{-x}y + \varphi(x)$.

Así la solución es $e^{-x}y + \varphi(x) = 0$.

Para calcular $\varphi(x)$, se utiliza que $\dfrac{\partial g}{\partial x} = (-y - x)e^{-x}$, es decir $-ye^{-x} + \varphi'(x) = -ye^{-x} - xe^{-x}$, de donde $\varphi'(x) = -xe^{-x}$, e integrando por partes $\varphi(x) = xe^{-x} + e^{-x} + C$.

Luego la solución es $ye^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} + C = 0$, o lo que es equivalente

$$\boxed{y = ce^{-x} - x - 1}$$