ECUACIONES REDUCIBLES A EXACTAS

P(t,y)dt + Q(t,y) dy = 0 que no es exacta, pero sabemos que existe $\mu(t,y)$ tal que :
$\mu(t,y)$ P(t,y)dt + $\mu(t,y)$Q(t,y) dy = 0

$\mu(t,y)$ P(t,y)dt = P'(t,y)
$\mu(t,y)$ Q(t,y) dy = Q'(t,y)

Como P'(t,y)dt + Q'(t,y)dy es exacta, entonces :
$\frac{dP'(t,y)}{dy} = \frac{dQ'(t,y)}{dt}$ pero :
$\frac{dP'(t,y)}{dy} = \mu(t,y)\frac{dP(t,y)}{dy} + \frac{d\mu(t,y)}{dy}P(t,y)$

$\frac{dQ'(t,y)}{dt} = \mu(t,y)\frac{dQ(t,y)}{dt} + \frac{d\mu(t,y)}{dt}Q(t,y)$

entonces $\mu(t,y)(\frac{dP(t,y)}{dy} - \frac{dQ(t,y)}{dt}) = \frac{d\mu(t,y)}{dt}Q(t,y) - \frac{d\mu(t,y)}{dy}P(t,y)$ de donde :
$\frac{d\mu(t,y)}{dt}\frac{1}{\mu(t,y)}Q(t,y) = \frac{d\mu(t,y)}{dy}\frac{1}{\mu(t,y)}P(t,y) = \frac{dP(t,y)}{dy} - \frac{dQ(t,y)}{dt}$
$\frac{d\mu(t,y)}{dt}\frac{1}{\mu(t,y)} = \frac{d}{dt}(\ln(\mu(t,y)))$ $\qquad$ $\frac{d\mu(t,y)}{dy}\frac{1}{\mu(t,y)} = \frac{d}{dy}(\ln(\mu(t,y)))$
Al final, el factor integrante satisface la siguiente ecuación :
$Q\frac{d}{dt}(\ln\mu) - P\frac{d}{dy}(\ln\mu) = \frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dt}$

<u>Ejemplo</u>:

La ecuación $(1\text{-}t^2y)dt - t^2(y\text{-}t)dy = 0$ con $P = (1 - t^2 y)$ y $Q = t^2(y\text{-}t)$
No es exacta ya que las derivadas parciales no son iguales:
$\frac{dP}{dy} = -t^2$
$\frac{dQ}{dt} = 2ty - 3t^2$
Pero es reducible a exacta con un factor integral $\mu(t,y)$ que sólo depende de t ($\mu(t)$)
Para encontrar $\mu(t)$ hay que resolver la ecuación :
$Q\frac{d}{dt}(\ln\mu) - P\frac{d}{dy}(\ln\mu) = \frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dt}$
pero μ sólo depende de t, entonces $\frac{d(\ln(\mu))}{dy} = 0$ y la ecuación se reduce a $d(\ln(\mu)) = \frac{\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dt}}{Q}$
Como:
$\frac{dP}{dy} = -t^2$
$\frac{dQ}{dt} = 2ty - 3t^2$
entonces $\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dt} = -t^2 - 2ty + 3t^2 = -2t(y - t)$
entonces $\frac{\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dt}}{Q} = \frac{-2t(y-t)}{t^2(y-t)} = \frac{-2}{t}$
Por lo tanto : $\frac{d}{dt}(\ln((\mu)) = \frac{-2}{t}$ entonces $\ln(\mu) = \ln(t^{-2}) + C$; $\mu = e^c(t^{-2})$ siendo
$e^c = k$; $\mu = \frac{k}{t^2}$
tomemos $\mu(t) = \frac{1}{t^2}$ y veamos que $\mu(t)$ P(t,y) dt + $\mu(t)$ Q(t,y) dy = 0 es exacta

$\frac{1}{t^2}(1 - t^2 y)dt + \frac{1}{t^2}(t^2(y - t))dy = 0$ y nos queda : $(\frac{1}{t^2} - y)dt + (y - t)dy = 0$

$\frac{dP'(t,y)}{dy} = -1$

$\frac{dQ'(t,y)}{dt} = -1$

La ecuación es exacta. Ahora hay que resolverla :

$(\frac{1}{t^2} - y)dt + (y - t)dy = 0$

$\frac{1}{t^2} - y$=P'(t,y)

y-t=Q'(t,y)

existe F(t,y) tal que :

$\frac{dF(t,y)}{dt} = P'(t,y)$; $\frac{dF}{dt} = \frac{1}{t^2} - y$; $F(t,y) = \int (\frac{1}{t^2} - y)dt + g(y) = -\frac{1}{t} - yt + g(y)$

Tenemos que $F(t,y) = \frac{-1}{t} - yt + g(y)$, para determinar g(y) empleamos la ecuación:

$\frac{dF(t,y)}{dy} = Q(t,y)$; $\frac{dF}{dy} = -t + g'(y) = y - t$; g'(y)= y ; g(y)=$\frac{y^2}{2}$

Por lo tanto F(t,y)=$\frac{-1}{t} - yt + \frac{y^2}{2}$

De donde deducimos que la solución general de la ecuación $\frac{-1}{t} - yt + \frac{y^2}{2}$=C

Al final el factor integrante satisface la siguiente ecuación:

$Q\frac{d}{dt}(\ln\mu) - P\frac{d}{dy}(\ln\mu) = \frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dt}$

<u>Observación</u>: si μ(t) la ecuación se reduce a :

$d(\ln(\mu)) = \frac{\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dt}}{Q}$=f(t) entonces $\mu = e^{\int f(t)dt}$

<u>Calcular la solución general de una ecuación lineal</u> :

$\frac{dy}{dt} + g(t)y = h(t)$; dy+(g(t)y-h(t))dt=0

dy=Q(t,y) (g(t)y-h(t))dt=P(t,y)

Esta ecuación es exacta con un factor integrante que depende de t.

$\frac{\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dt}}{Q} = g(t)$, entonces $\mu(t) = e^{\int g(t)dt}$ por lo tanto, la ecuación :

μ(t)dy+μ(t)(g(t)y-h(t))dt=0

μ(t)dy=Q'(t,y) μ(t)(g(t)y-h(t))dt=P'(t,y)

$\frac{dF(t,y)}{dy} = Q(t,y) = e^{\int g(t)dt}$; $F(t,y) = ye^{\int g(t)dt} g(t)$

Ahora utilizamos la primera ecuación:

$\frac{dF}{dt} = yg(t)e^{\int g(t)dt} + g'(t) = yg(t)e^{\int g(t)dt} - h(t)e^{\int g(t)dt}$

y nos queda que : g'(t)=-h(t)e$^{\int g(t)dt}$ de donde g(t)=-$\int h(t)e^{\int g(t)dt}$ y por lo tanto

$F(t,y) = ye^{\int g(t)dt} - \int h(t)e^{\int g(t)dt}$

Las soluciones de la ecuación serían:

$e^{\int g(t)dt} - \int h(t)e^{\int g(t)} = C$

entonces $y = e^{-\int g(t)}(C + \int h(t)e^{\int g(t)}dt)$