Cálculo

Febrero, 2005

Índice general

La integral indefinida

Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definición

Diremos que F es **primitiva** *de f en I si*

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in I.$$

Teorema

Si F y G son dos primitivas de una misma función f en un intervalo I, entonces,

$$\exists k \in \mathbb{R} \Big/ F(x) = G(x) + k, \qquad \forall x \in I.$$

La integral indefinida

Definición

Dada una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, llamaremos **integral indefinida** *de f al conjunto de todas sus primitivas, y escribiremos:*

$$\int f(x)\,dx = \left\{F \,/\, F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I\right\}.$$

- En consecuencia, si conocemos una primitiva F de f, conocemos todas:

$$\int f(x)\,dx = \{F + k, \qquad \forall k \in \mathbb{R}\}.$$

Propiedad (linealidad de la integral)

- $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
- $\displaystyle\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Integrales inmediatas

$$\int f(x)^m f'(x)\,dx = \frac{1}{m+1} f(x)^{m+1} + C, \quad m \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\int [\sin f(x)]\, f'(x)\,dx = -\cos f(x) + C$$

$$\int [\cos f(x)]\, f'(x)\,dx = \sin f(x) + C$$

Integrales inmediatas

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \arctan f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}\,dx = \arcsin f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}\,dx = -\cot f(x) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \tan f(x) + C$$

$$\int [\tan f(x)]\, f'(x)\,dx = -\ln|\cos f(x)| + C$$

$$\int [\cot f(x)]\, f'(x)\,dx = \ln|\sin f(x)| + C$$

Integración por partes

$$\int u(x)v'(x)\,dx = (uv)(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

o, equivalentemente,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Integración por cambio de variable

Sean:

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable,
$\varphi : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ inyectiva, con derivada continua y tal que:

$$\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$$

Entonces

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

Integrales racionales

Son integrales del tipo $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, siendo P y Q polinomios

- Si $gr(P) \geq gr(Q)$, debemos calcular el cociente de los polinomios para expresarlo en la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

- Si $gr(P) < gr(Q)$, podemos encontrar cuatro situaciones:
  (a) Todas las raíces son reales y simples
  (b) Todas las raíces son reales y alguna es múltiple
  (c) Algunas raíces son complejas y simples
  (d) Algunas raíces son complejas y múltiples.

Integrales racionales

Todas las raíces son **reales** y **simples**.

Entonces, podemos hacer:

$$Q(x) = (x - a_1)\,(x - a_2)\,\ldots\,(x - a_n)$$

Se descompone el cociente como sigue:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

Integrales racionales

Todas las raíces son **reales** y **alguna es múltiple**

El polinomio Q puede factorizarse en la forma:

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_r)^{\alpha_r},$$

donde $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = gr(Q)$

Se descompone el cociente como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = &\frac{A_{11}}{(x-a_1)} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \\ &+ \frac{A_{21}}{(x-a_2)} + \frac{A_{22}}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{A_{2\alpha_2}}{(x-a_2)^{\alpha_2}} + \dots + \\ &+ \frac{A_{r1}}{(x-a_r)} + \frac{A_{r2}}{(x-a_r)^2} + \dots + \frac{A_{r\alpha_r}}{(x-a_r)^{\alpha_r}}\end{aligned}$$

Algunas raíces son **complejas simples**.

Toda raíz compleja siempre aparece con su conjugada

Para cada raíz compleja tendremos un término de la forma:

$$(x-(r+si))\,(x-(r-si)) = (x-r)^2+s^2$$

El desarrollo de $Q(x)$ tendrá entonces la forma:

$$Q(x) = (x-a_1)\,(x-a_2)\,\ldots\,(x-a_n)\left((x-r)^2+s^2\right)$$

y la descomposición del cociente será:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n} + \frac{Ax+B}{(x-r)^2+s^2}$$

Finalmente,

$$\int \frac{Ax+B}{(x-r)^2+s^2}\,dx = \frac{A}{2}\ln\left[(x-r)^2+s^2\right] + \frac{Ar+B}{s}\arctan\frac{x-r}{s} + C$$

Integrales trigonométricas

Son integrales del tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$, donde R denota una función que combina operaciones racionales.
Por ejemplo:

$$\int \frac{1}{\cos^2 x + \operatorname{sen} x}\, dx,$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^3 x}{1 - \tan^5 x}\, dx$$

Integrales trigonométricas

Estas integrales se reducen a integrales racionales con los siguientes cambios:

- Caso $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$: se hace el cambio $t = \operatorname{sen} x$:

$$\cos x = \sqrt{1-t^2} \qquad dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

- Caso $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$: se hace el cambio $t = \cos x$:

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1-t^2} \qquad dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

- Caso $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$: se hace el cambio $t = \tan x$:

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \qquad dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

- En otro caso se realiza el cambio trigonométrico universal $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Integrales irracionales

- $$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}\right)\, dx$$

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^{\alpha}, \quad \alpha = \mathrm{mcm}(n, \ldots, s)$$

- $$\int R\left(x, \sqrt{-ax^2+c}\right)\, dx$$

$$x = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \operatorname{sen} t$$

- $$\int R\left(x, \sqrt{ax^2-c}\right)\, dx$$

$$x = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \sec t$$

- $$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+c}\right)\, dx$$

$$x = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \tan t$$

Particiones

Sea un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Definición

Llamamos **partición** *P de $[a,b]$ al conjunto de puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ que verifica:*

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

Definición

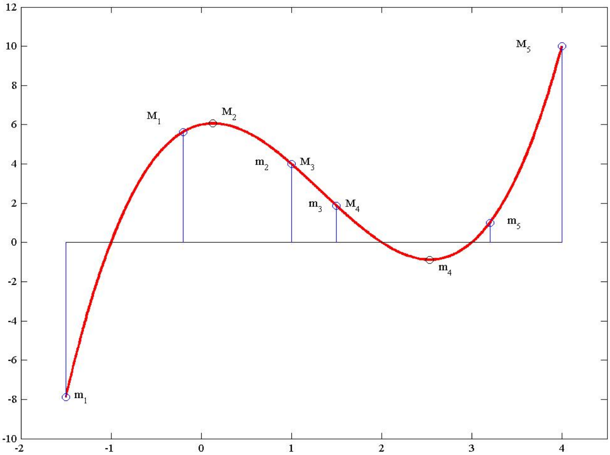
La partición P^* es un **refinamiento** *de P si $P \subset P^*$: todos los puntos de P están en la partición P^*.*

Definición

Llamamos **conjunto de las particiones** *$\mathscr{P}[a,b]$ al conjunto de todas las particiones posibles del intervalo $[a,b]$.*

Sea f una función real y acotada en el intervalo $[a,b]$ y sea P una partición.

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \qquad m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x).$$



Sumas de Riemann

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.

Definición

Llamamos **suma superior de Riemann** *y* **suma inferior de Riemann** *de la función f relativas a la partición P a:*

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \qquad L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

- Asimismo, se definen las **sumas intermedias**:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \qquad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Sumas de Riemann

Propiedad

$L(P,f) \leq U(P,f), \quad \forall P \in \mathscr{P}[a,b].$

Teorema

Si P^* es un refinamiento de P, entonces:

$$L(P^*,f) \geq L(P,f) \qquad y \qquad U(P^*,f) \leq U(P,f)$$

Propiedad

$L(P_1,f) \leq U(P_2,f), \quad \forall P_1, P_2 \in \mathscr{P}[a,b].$

La integral de Riemann

Definición

Llamamos **integral superior de Riemann** *e* **integral inferior de Riemann** *de la función f en el intervalo $[a,b]$ a:*

$$\overline{\int_a^b} f\,dx = \inf_{P\in\mathscr{P}[a,b]} U(P,f) \qquad \underline{\int_a^b} f\,dx = \sup_{P\in\mathscr{P}[a,b]} L(P,f)$$

Teorema

Para toda función f real y acotada,

$$\underline{\int_a^b} f\,dx \leq \overline{\int_a^b} f\,dx.$$

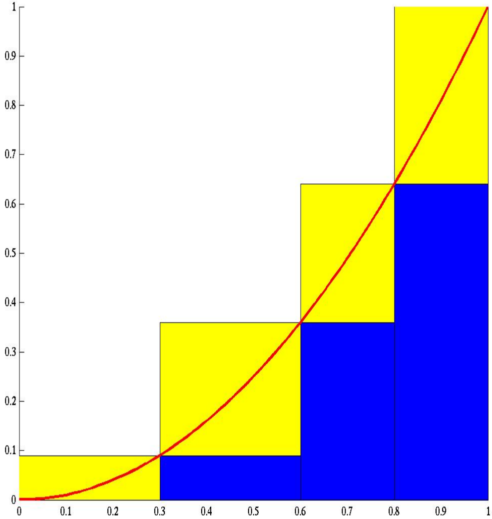
La integral de Riemann

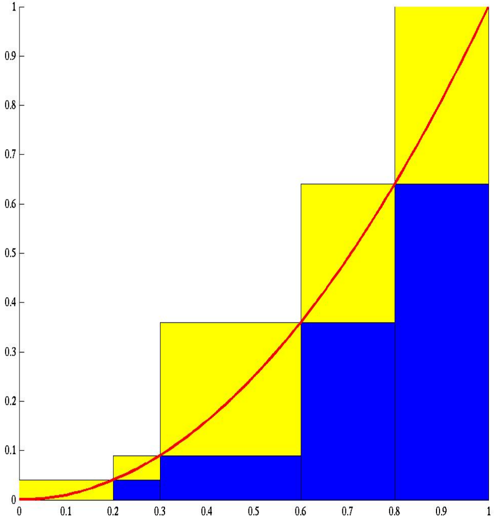
Definición

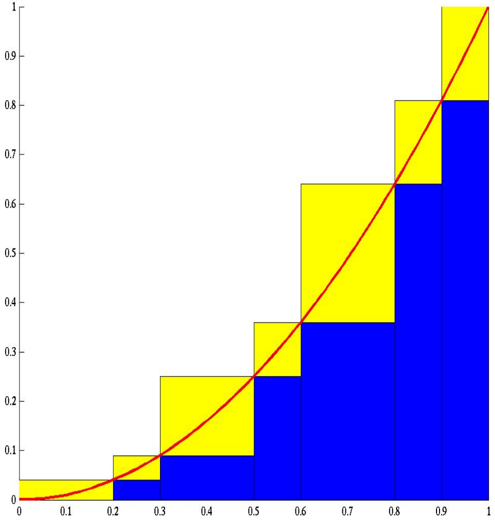
Si las integrales superior e inferior de Riemann de una función coinciden, llamamos a este valor **integral de Riemann** *de f en el intervalo $[a,b]$:*

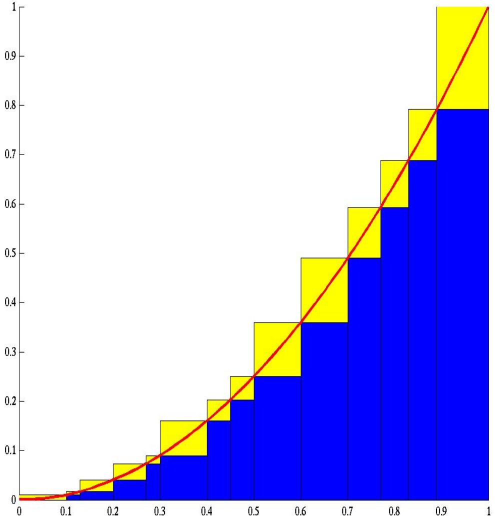
$$\overline{\int_a^b} f\,dx = \underline{\int_a^b} f\,dx = \int_a^b f\,dx$$

y decimos que f es **integrable según Riemann***: $f \in \mathscr{R}[a,b]$.*


0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Interpretación gráfica

Dada una función positiva en un intervalo $[a,b]$, su integral de Riemann representa el área encerrada por la curva $y = f(x)$ y el eje $y = 0$, entre las abscisas $x = a$ y $x = b$.

Teorema (Existencia de la integral de Riemann)

La función f es integrable en $[a,b]$ en el sentido de Riemann si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists P \in \mathscr{P}[a,b] \text{ tal que } U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon.$$

Teorema (de integrabilidad)

- *Toda función* **continua** *en* $[a,b]$ *es integrable en dicho intervalo*

  $\Longrightarrow$ *Toda función* **derivable** *es continua, y por lo tanto integrable*
- *Toda función* **monótona** *y* **acotada** *en* $[a,b]$ *es integrable en dicho intervalo*
- *Toda función* **acotada** *en* $[a,b]$ *que presenta en dicho intervalo un número finito de puntos de discontinuidad, es integrable en* $[a,b]$
- *Sea* f *una función* **integrable** *en* $[a,b]$ *en el sentido de Riemann, y tal que:*

  $$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a,b].$$

  Si g *es* **continua** *en* $[m,M]$*, entonces la* **función compuesta** $(g \circ f)$ *es integrable en* $[a,b]$

Propiedad

Sean $f,g \in \mathscr{R}[a,b]$

- $(f \pm g) \in \mathscr{R}[a,b]$ *y* $(cf) \in \mathscr{R}[a,b], \ \ \forall c \in \mathbb{R}$*, y se cumple:*

$$\int_a^b (f \pm g)\,dx = \int_a^b f\,dx \pm \int_a^b g\,dx \qquad \int_a^b cf\,dx = c\int_a^b f\,dx$$

- *Si* $f(x) \leq g(x)$ *en* $[a,b]$*, entonces* $\displaystyle\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$
- *Si* $a < c < b$*, entonces* $f \in \mathscr{R}[a,c]$ *y* $f \in \mathscr{R}[c,b]$*, y se verifica:*

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$$

- *Si* $|f(x)| \leq M, \ \ \forall x \in [a,b]$*, entonces* $\displaystyle\int_a^b f\,dx \leq M(b-a)$
- $fg \in \mathscr{R}[a,b]$
- $|f| \in \mathscr{R}[a,b]$*, y se cumple:* $\displaystyle\left|\int_a^b f\,dx\right| \leq \int_a^b |f|\,dx$

Teorema (del cambio de variable)

Sea $f \in \mathscr{R}[a,b]$, y g una función real de clase $\mathscr{C}^1([c,d])$. Si $g([c,d]) \subset [a,b]$, se verifica:

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(t)\,dt = \int_c^d f(g(x))\,g'(x)\,dx$$

Teorema (del valor medio)

Sea $f \in \mathscr{R}[a,b]$, y llamemos:

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \qquad m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

Entonces, $\exists c \in \mathbb{R}$, $m \leq c \leq M$ tal que:

$$\int_a^b f\,dx = c\,(b-a).$$

Además, si f es continua en $[a,b]$, $\exists x_0 \in [a,b]$ tal que $c = f(x_0)$.

Teorema (fundamental del cálculo)

Sea $f \in \mathscr{R}[a,b]$. Para $a \leq x \leq b$, llamemos:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Entonces, $F \in \mathscr{C}[a,b]$. Además, si f es continua en $[a,b]$, F es derivable en $[a,b]$, y $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

También puede enunciarse de la siguiente manera: si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en I, entonces tiene primitivas en I; una de ellas es la integral definida F dada por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

donde $a \in I$ **es cualquiera**.

DEMOSTRACIÓN

(a) Sea $c \in [a,b]$. Por la definición de F, tenemos:

$$\begin{aligned} F(c+\Delta x)-F(c) &= \int_a^{c+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{c} f(t)\,dt = \\ &= \int_a^{c} f(t)\,dt + \int_c^{c+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{c} f(t)\,dt = \\ &= \int_c^{c+\Delta x} f(t)\,dt = \mu\,\Delta x, \qquad \mu \in [m,M] \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\Delta x\to 0}[F(c+\Delta x)-F(c)] = \lim_{\Delta x\to 0}\mu\,\Delta x = 0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}F(c+\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0}F(c) = F(c)$$

$$\lim_{x\to c}F(x) = F(c)$$

o, lo que es lo mismo, F es continua en $c \in [a,b]$. Puesto que la igualdad es válida para cualquier punto c, F es continua en $[a,b]$.

(b) Por ser f continua,

$$F(c+\Delta x)-F(c)=f(\xi)\,\Delta x \quad , \qquad \xi\in[c,c+\Delta x]$$
$$\frac{F(c+\Delta x)-F(c)}{\Delta x}=f(\xi) \quad , \qquad \xi\in[c,c+\Delta x]$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(c+\Delta x)-F(c)}{\Delta x}=F'(c)=f(c)=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)$$

Como la igualdad es válida para cualquier $c\in[a,b]$,

$$F'(x)=f(x) \quad , \qquad \forall x\in[a,b]$$

Regla de Barrow

Si $f \in \mathscr{R}[a,b]$ y existe una función F derivable en $[a,b]$ tal que $F' = f$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \quad F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Teorema (Integración por partes)

Si F y G son dos funciones derivables en $[a,b]$, y se tiene:

$$\begin{cases} F' = f \\ G' = g \end{cases} \qquad \qquad en\ [a,b]$$

siendo f y g integrables en $[a,b]$, entonces,

$$\int_a^b F(x)\,g(x)\,dx = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) - \int_a^b f(x)\,G(x)\,dx.$$

Teorema

Sea la función F dada por la integral definida:

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt.$$

La derivada de F con respecto a x viene dada por:

$$F'(x) = f(b(x))\,b'(x) - f(a(x))\,a'(x).$$

Integración impropia

Definición

La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ *se denomina* **impropia** *si tiene al menos una de las condiciones siguientes:*

- *el intervalo* (a,b) *no es acotado*
- f *no está acotada en* (a,b).

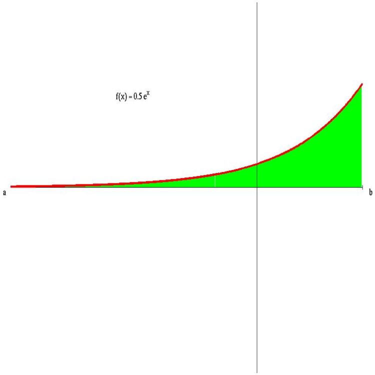
Clasificamos las integrales impropias en 3 tipos.

Integrales impropias de primera especie

Sea $f:(-\infty,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[m,b]$, $\forall m\leq b$. Definimos:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{m\to-\infty}\int_{m}^{b} f(x)\,dx$$

si existe el límite, en cuyo caso la integral se denomina **convergente**.



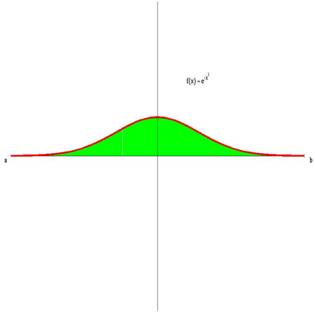
Integrales impropias de primera especie

De igual forma se definen:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_{a}^{M} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

si ambas integrales convergen. Las definiciones no dependen de $a \in \mathbb{R}$.



Integrales impropias de segunda especie

Consideramos la función $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ no acotada en uno de los extremos del intervalo, por ejemplo en a. Si f es integrable en $[t,b]$ para todo t tal que $a\leq t\leq b$, entonces definimos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a}\int_t^b f(x)\,dx$$

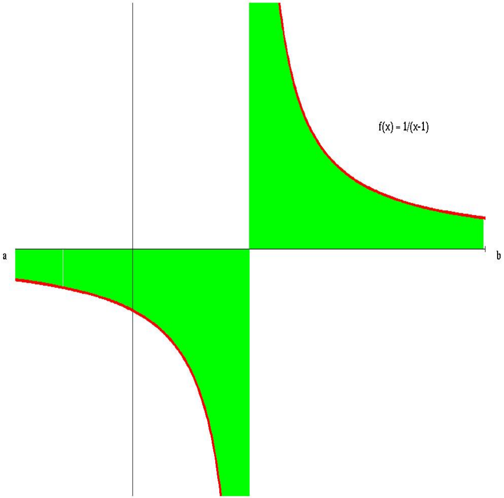
si existe el límite, en cuyo caso la integral se denomina **convergente**.

Si la función pierde el carácter acotado en un punto $c\in(a,b)$, definimos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

donde las dos últimas integrales se han descrito anteriormente.

Integrales impropias de segunda especie



Integrales impropias de tercera especie

Corresponden a un **intervalo no acotado** y una **función no acotada** en un número finito de puntos del intervalo.

Ejemplo

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\, dx.$$

Se reduce a los casos anteriores de la siguiente forma:

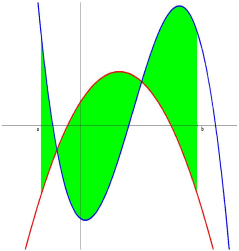
$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\, dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx}_{2^a \text{ especie}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx}_{1^a \text{ especie}}$$

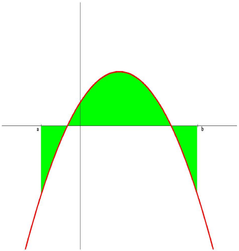
Área de superficies planas

Sean las funciones $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables. Entonces el **área** A limitada por los grafos de ambas, las rectas $x = a$ y $x = b$ viene dada por:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

- **Caso particular**: $g(x) = 0$, luego $A = \int_a^b |f(x)|\, dx$

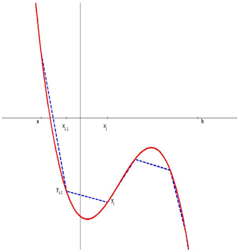




Longitud de un arco de curva

Sea $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. La **longitud** ℓ del grafo de f que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$



Longitud de un arco de curva

DEMOSTRACIÓN. Aproximamos ℓ mediante la longitud de una línea poligonal construida uniendo los puntos $(x_i, f(x_i))$, donde $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición del intervalo $[a,b]$. Así:

$$\ell_P = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + \frac{(f(x_i)) - f(x_{i-1})^2}{(x_i - x_{i-1})^2}} = \qquad \text{(tma. valor medio)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + f'(c_i)^2} \qquad (c_i \in [x_{i-1}, x_i])$$

ℓ_P es la suma intermedia de la función $g(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$. Aplicando un proceso de límite cuando el diámetro de la partición tiende a 0,

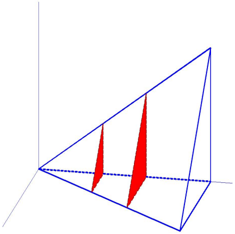
$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Volumen de un sólido

Supongamos un sólido que, al ser cortado por un plano perpendicular al eje OX, para cada $x \in [a,b]$ produce una sección de área $A(x)$.
El **volumen** de dicho cuerpo comprendido entre $x = a$ y $x = b$ es:

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

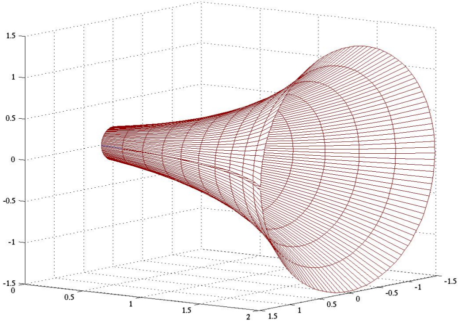
- De igual forma, se obtendría el volumen del cuerpo a partir de las áreas de las secciones producidas por planos perpendiculares al eje OY en el intervalo $[a,b]$.



Volumen de un sólido

Caso particular: volumen de revolución. Si giramos el grafo de $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ alrededor del eje OX, se construye una figura cuyo volumen es:

$$V=\pi\int_a^b f(x)^2\,dx$$



Superficie lateral de revolución

El **área lateral** del sólido construido al girar el grafo de $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ alrededor del eje OX, donde f es una función de clase $\mathscr{C}^1$, se calcula mediante:

$$A_L = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$