ESTADÍSTICA I, curso 2007-2008

Problemas Tema 4

1. En un problema de una prueba aplicada a niños pequeños se les pide que hagan corresponder tres dibujos de animales con la palabra que identifica a ese animal. Si un niño asigna aleatoriamente las tres palabras a los tres dibujos, obténgase la función de masa de probabilidad de Y= número de correspondencias correctas.

2. Con el propósito de verificar la exactitud de sus estados financieros, las compañías tienen auditores permanentes para verificar los asientos contables. Supóngase que los empleados de una compañía cometen errores el 5% de las veces y que éstos son siempre detectados por los auditores. Si un auditor verifica tres asientos al azar:
   a. Obténgase la función de masa de probabilidad de Y=número de errores detectado por el auditor.
   b. Calcúlese la probabilidad de que el auditor detecte más de un error.

3. Tenemos dos urnas, en la urna A hay 5 bolas blancas y 4 rojas y en la B hay 6 blancas y 3 rojas. Se sacan, sin reemplazamiento, dos bolas de cada urna. Sea X el nº de bolas blancas que salen de la urna A e Y el nº de bolas blancas que salen de la urna B. Calcular:
   a. Las distribuciones de probabilidad de X e Y.
   b. La distribución de probabilidad de la variable z = X + Y.

4. Una persona tiene tiempo para jugar a la ruleta 5 veces a lo sumo. En cada juego gana o pierde 6 euros. Una persona empieza con 6 euros y dejará de jugar si antes de la 5ª vez pierde todo su dinero o si gana 18 euros, esto es, si tiene 24 euros. Hallar:
   a. El número de casos en que puede ocurrir la apuesta
   b. La función de probabilidad
   c. La esperanza matemática

5. Una variable X aleatoria tiene por función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 0.2x & 0 < x \le 1 \\ 0.2 & 1 < x \le 2 \\ 0.2x - 0.2 & 2 < x \le 3 \\ 0.4 & 3 < x \le 4 \\ 0 & 4 < x \end{cases}$$

Calcular:

a. $P(x \leq 1)$
b. $P(1 < x \leq 2)$
c. $P(2 < x \leq 3)$

6. Sea X una variable aleatoria continua de función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} C(1+x^2) & si \quad x \in (0,3) \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

   a. Hallar el valor de la constante C y la función de distribución de probabilidad.
   b. Dibujar ambas funciones.
   c. Probabilidad de que X esté comprendido entre 0 y 1
   d. Probabilidad de que X sea menor que 1
   e. Probabilidad de que X ses mayor que 2
   f. Calcular E(x) y Var(x)

7. La función de densidad de una variable aleatoria continua es:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & si \quad x \in (0,2) \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

   sabiendo que $P(1/2 < x < 1) = 1/8$, calcualar:

   a. a y b
   b. La función de distribución. Representar f(x) y F(x).
   c. Calcular $P(x<1/2)$, $P(/4<x<3/4)$, $P(x>1)$

8. Consideremos una situación ideal en la Bolsa. Al empezar un año parte de 100 enteros y la probabilidad de que suba un entero en un día es 1/3 y de que baje un entero es 2/3. Suponemos que las alzas y bajas son independientes de un día a otro. Sea X la v.a. que da la posición de la Bolsa después de dos sesiones consecutivas. Se pide:
   a. Hallar la función de masa de probabilidad de la v.a. X.
   b. Calcular la esperanza de X.

9. Un vendedor de equipo pesado puede entrevistar a uno o dos clientes diariamente con una probabilidad de 1/3 y 2/3, respectivamente. Cada entrevista tendrá como resultado una venta de 50.000 euros, o no, con probabilidades 0,1 y 0,9, respectivamente. Obténgase la función de masa de probabilidad de la variable aleatoria "ventas diarias" y calcúlese su media y su desviación típica.

10. Un cliente potencial para una póliza de seguros por 20.000 euros, tiene una casa en un área en la que puede sufrir en un año (por robo u otros motivos) una pérdida total con una probabilidad de 0,001 y una pérdida del 50% con una probabilidad de 0,01.

¿Qué prima tendría que cobrar la compañía de seguros por una póliza anual para salir sin pérdidas ni ganancias con todas las pólizas de este tipo?

11. Un inversor dispone de 10.000 euros para realizar una inversión a plazo de un año. Se plantea dos opciones: colocar su capital en una cuenta de renta fija con un interés del 15% anual, o bien invertir en un fondo de renta variable, que, según los analistas financieros, presenta una rentabilidad aleatoria cuya distribución de probabilidad es la siguiente:

Rentabilidad (%)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Probabilidad (%)	1	4	10	15	25	25	12	5	3

¿Qué opción debe tomar el inversor, si elige aquella inversión que le proporcione la rentabilidad esperada más alta?

12. Un saco que contiene 4.000 monedas se vacía sobre una mesa. Decidir, con el uso de la desigualdad de Chebychev, ¿para qué valor de k se tiene que el número de caras obtenido pertenece al intervalo (2.000 − k, 2.000 + k) con probabilidad igual o superior a 0,9?

13. El número medio de alumnos que se presentan al examen de una asignatura es 200 y la varianza de dicho número es 64. Determínese el número de copias del examen que deberán realizarse para que, con probabilidad 0.90, todos los alumnos presentados dispongan de una copia al inicio de la prueba.

14. Sea X una variable aleatoria continua de función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} C(1+x^2) & si \quad x \in (0,3) \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

a. Hallar el valor de la constante C y la función de distribución. Dibujar ambas funciones
b. Probabilidad de que X esté comprendido entre 0 y 1
c. Probabilidad de que X sea menor que 1
d. Probabilidad de que X sea mayor que 2
e. Calcular E(x) y Var(x)

15. Un equipo médico está aplicando cierto test para la prevención de infartos entre los empleados de una determinada empresa. Dicho equipo ha clasificado, en razón de su peso, a los individuos en tres grupos de riesgo: aquellos cuyo peso es inferior a 70 Kg., los que tienen peso comprendido entre 70 y 90 Kg. y un tercer grupo formado por los que pesan más de 90 Kg. La probabilidad de que el test dé un resultado positivo, y por tanto se recomiende internar al paciente para una revisión más

cuidadosa, es de 0,40, 0,70 y 0,90, respectivamente, para cada uno de los grupos de riesgo.
Se sabe que el peso de los trabajadores de la empresa en cuestión es una variable aleatoria continua X, con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{70} e^{-\frac{x}{70}} & \text{si } 40 < x < 110 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo k constante.
Si se elige un paciente al azar, observándose una respuesta positiva al test, ¿cuál es la probabilidad de que su peso esté comprendido entre 70 y 90 Kg?.

16. El 52% de los pacientes aquejados de una determinada enfermedad son mujeres. Sabiendo que el tiempo de supervivencia a esta enfermedad desde el momento de diagnóstico, para este grupo de la población, es una variable aleatoria continua con función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{(4-x)^2}{16} & \text{si } 0 \le x < 4 \\ 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Se pide:

a. Calcular la esperanza de vida de una mujer a la que se le haya diagnosticado dicha enfermedad.
b. ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente aquejado de dicha enfermedad sea mujer y sobreviva al menos 3 años?

17. En dos centros de investigación en medicina se han desarrollado dos medicamentos para su aplicación en la curación de una determinada enfermedad: fármaco 1 y fármaco 2. El tiempo (en días) requerido para la curación de dicha enfermedad por los fármacos 1 y 2 son variables aleatorias X e Y, con funciones de densidad f y g, respectivamente, definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{50-x}{50} & \text{si } 40 < x < 50 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad g(y) = \begin{cases} \dfrac{60-x}{200} & \text{si } 40 < y < 60 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Un paciente aquejado de tal enfermedad ha sido atendido en un centro asistencial donde el 40% de los facultativos aplican el fármaco 1, mientras que el 60% restante prefiere aplicar el fármaco 2. Si el tiempo requerido para la curación de dicho paciente ha sido superior a 45 días, ¿cuál es la probabilidad de que le haya sido recetado el fármaco 1?

18. Un fabricante de baterías para automóviles lanza al mercado una oferta para todas aquellas personas que compren su producto durante un determinado mes, consistente en: entregarles una batería nueva si la que compran se les estropea antes de un año, devolverles la cantidad de 10 euros si se les estropea entre el primer y el tercer año y a partir del tercer año no devuelve nada.
Por una parte se sabe que el coste de fabricación de una batería es de 40 euros y que la vende a 90. Por otro lado, el tiempo de vida en años de esas baterías es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a. Con este procedimiento de venta, determinar la distribución de la ganancia por batería vendida.
b. Calcular la ganancia media por batería vendida.
c. Si vendía 800 baterías al mes y gracias a la oferta pasa a vender 1.300, ¿es rentable la oferta?

19. La duración (en horas) de las lámparas no defectuosas de cierta marca es una variable aleatoria X, con densidad de la forma k/x^3 para x > 30. Sin embargo, un 10% de las lámparas son defectuosas y pueden fundirse en cualquier instante aleatorio anterior a 30 horas. Determinar:
a. La distribución, la media y la desviación típica de la duración de una lámpara.
b. La distribución, la media y la desviación típica del tiempo de funcionamiento de un aparato que necesita tres lámparas iguales.