ESTADÍSTICA I, curso 2007-2008

Problemas de Estimación puntual

1. En muestras de tamaño n = 3 de una variable aleatoria normal de media μ y varianza conocida $\sigma^2 = 1$, se consideran los estimadores:
   a. $U_1 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3$
   b. $U_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{4}X_3$
   c. $U_3 = \frac{1}{8}X_1 + \frac{3}{8}X_2 + \frac{1}{2}X_3$

   Comprobar que son estimadores insesgados y estudiar su eficiencia. Calcular la estimación de μ para la muestra, $x_1 = 2.6$, $x_2 = 3.1$, $x_3 = 1.8$.

2. Se toma una muestra aleatoria de diez alumnos de una población escolar de alumnos de primero de E.S.O. Se ha estimado de experiencias anteriores que la altura de los alumnos de primero de E.S.O. constituye una característica que se distribuye según una variable aleatoria normal de media 167 cm. y desviación típica 3.2 cm. Se pide:
   a. Probabilidad de que la media muestral de las alturas de los diez alumnos sea inferior a 165 cm.
   b. Probabilidad de que la cuasivarianza muestral de las alturas de los diez alumnos sea superior a 15.90.

3. Comparar los estimadores S^2 y $\hat{S}^2$ desde el punto de vista de sus errores cuadráticos medios (en el caso de que la población sea normal).

4. Sea X una variable aleatoria con esperanza μ y varianza σ^2 Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra de X. Encontrar el valor de C para el cual $C\sum_{i=1}^{n-1}\left(X_{i+1} - X_i\right)^2$ es un estimador insesgado de σ^2.

5. Supóngase que un objeto se mide de forma independiente con dos instrumentos de medición diferentes. Sean L_1 y L_2 las longitudes que se midieron con el primero y el segundo, respectivamente. Si ambos instrumentos están correctamente calibrados, podemos suponer que $E(L_1) = E(L_2) = L$, la longitud verdadera. Sin embargo, la exactitud de los instrumentos no es necesariamente la misma. Si se mide la exactitud en términos de la varianza, entonces $V(L_1) \neq V(L_2)$. Probar que la combinación lineal, $Z = aL_1 + (1 - a)L_2$, es un estimador insesgado de L. ¿Para que elección del valor de a, 0 < a < 1, es mínima la varianza de Z?

6. A mediados de la década de 1930, el cisne trompetero estaba en peligro de extinción en Norteamérica. En esta época, se designaron como refugio el Yellowstone Park y un área adyacente de fuentes termales en Red Rock Lakes, Montana.
   A finales de los años sesenta se efectuó un estudio de los cisnes en el área. Se capturaron y marcaron cincuenta cisnes. Una segunda muestra de 30 cisnes contenía cinco que habían sido marcados. Basándose en esta información, obtener una estimación puntual del número total de cisnes (N) en la región en esas fechas.

7. Dada $X_1,...,X_n$ una muestra aleatoria simple de una $U(0,b)$, estimar el parámetro b por el método de los momentos.

8. Obtener por el método de los momentos un estimador del parámetro θ de una variable X con función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\theta^2}(\theta-x) & \text{si } 0<x<\theta\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

9. Obtener los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de una $N(\mu,\sigma)$.

10. La vida media de funcionamiento de una impresora es una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro θ. Se ha observado una muestra de 10 impresoras con los siguientes resultados de vida media (en años): 7,4,3,5,6,4,3,4,5,7. A partir de estos datos obtener una estimación de θ por los métodos de máxima verosimilitud y de los momentos.