Part I

Probabilidad

Introducción

- El concepto de probabilidad está asociado a experimentos (procesos de observación) donde existe incertidumbre sobre el resultado final, que desde un punto de vista práctico son la mayoría de los experimentos reales.
- La Teoría de la Probabilidad es importante como soporte teórico de la Estadística (Inferencia Estadística) y como herramienta en el estudio de la mayoría de las áreas de conocimiento: Ingeniería, Economía, Sociología, Medicina, Biología, etc.
- El origen de la Teoría de la Probabilidad está ligado al estudio de los juegos de azar, siendo pioneros los trabajos realizados por G. Cardano y G. Galilei en el siglo XVI. Actualmente constituye un área científica de intensa investigación.

Experimentos y sucesos

Experimentos

- Un experimento es "un proceso por medio del cual se obtiene una observación".
- Un experimento determinista es el que al realizarse repetidas veces, en idénticas condiciones, proporciona siempre el mismo resultado y, por tanto, puede predecirse de antemano.
- Un experimento aleatorio es el que puede dar lugar a diferentes resultados, conocidos previamente, sin que sea posible predecir cuál va a ser el resultado que va a ocurrir en una determinada realización del experimento.
- La Teoría de la Probabilidad y la Estadística estudian los experimentos aleatorios que, en mayor o menor medida, son todos los experimentos reales.

Estadística I

Mario Francisco

Introducción

Experimentos y sucesos

Definición de probabilidad

Probabilidad condicionada e independencia de sucesos

Teorema de Bayes

Análisis combinatorio

Experimentos y sucesos

Álgebra de sucesos

- Suceso elemental o simple: es cada uno de los posibles resultados del experimento aleatorio.
- Espacio muestral: es el conjunto formado por todos los sucesos elementales. Lo denotaremos por $\Omega = \{\omega / \omega \text{ es un suceso elemental}\}$. Se clasifica en: discreto (si es finito o infinito numerable) y continuo.
- Suceso: es un subconjunto del espacio muestral. Son sucesos de interés: Ω, el suceso seguro, formado por todos los sucesos elementales y $\emptyset$, el suceso imposible, que no contiene elementos.
- Álgebra de sucesos: es el conjunto formado por todos los sucesos asociados a un experimento aleatorio. Lo denotaremos por $\mathcal{A} = \{A / A \text{ es un suceso}\}$.

Experimentos y sucesos

Ejemplo 1

Considérese el experimento aleatorio "lanzar un dado y observar el número de puntos obtenido". Los sucesos elementales son $\omega_i =$ "se obtienen i puntos", donde $i = 1, 2, \ldots, 6$. Son sucesos $A =$ "se obtiene un número par" $=$ "el resultado es 2, 4 o 6" y $B =$ "se obtiene un número mayor que 2" $=$ "el resultado es 3, 4, 5 o 6".

Ejemplo 2

Considérese el experimento aleatorio "tiempo de ejecución de un programa". Los sucesos elementales son $\omega_t =$ "la ejecución ha durado t segundos", con $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Son sucesos $C =$ "el tiempo de ejecución es superior a 10 segundos" y $D =$ "el tiempo de ejecución está entre 5 y 15 segundos".

Experimentos y sucesos

Álgebra de sucesos. Operaciones

- Unión de sucesos: si $A, B \in \mathcal{A}$, se define el suceso unión, $A \cup B$, como el que ocurre si sucede A o sucede B.
- Intersección de sucesos: si $A, B \in \mathcal{A}$, se define el suceso intersección, $A \cap B$, como el que ocurre si sucede A y sucede B. Por sencillez, $A \cap B$ también se escribe AB.
- Suceso complementario o contrario: si $A \in \mathcal{A}$, se define el suceso contrario, $\bar{A}$, como el que ocurre si no sucede A.
- Inclusión de sucesos: si $A, B \in \mathcal{A}$, se dice que A está contenido en B o que A implica B, $A \subset B$, si siempre que sucede A ocurre B.

Álgebra de sucesos. Operaciones

- Diferencia de sucesos: si $A, B \in \mathcal{A}$, se define el suceso diferencia, $A \backslash B$, como el que ocurre si sucede A y no sucede B, esto es,
$$A \backslash B = A \cap \bar{B}$$
- Diferencia simétrica de sucesos: si $A, B \in \mathcal{A}$, se define el suceso diferencia simétrica, $A \nabla B$, como el que ocurre si sucede sólo A o sólo B, esto es,
$$A \nabla B = (A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$$
- Sucesos incompatibles: dos sucesos $A, B \in \mathcal{A}$ son incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

Experimentos y sucesos

Álgebra de sucesos. Operaciones

- Conjunto exhaustivo de sucesos: $\{A_1, A_2, \ldots, A_n / \ A_i \in \mathcal{A}\}$ es un conjunto exhaustivo de sucesos si $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$
- Conjunto completo de sucesos: $\{A_1, A_2, \ldots, A_n / \ A_i \in \mathcal{A}\}$ es un conjunto completo de sucesos si es exhaustivo y los sucesos son incompatibles dos a dos:
  $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$
  A un "conjunto completo de sucesos" también se le denomina partición del espacio muestral. El conjunto de los sucesos elementales es una clase completa de sucesos y la partición más fina del espacio muestral.
- El álgebra de sucesos, $\mathcal{A}$, asociada a un experimento aleatorio tiene estructura de álgebra de Boole respecto a las operaciones unión e intersección

Álgebra de sucesos. Propiedades

- Conmutativa. $A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A$
- Asociativa.] $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Elemento neutro. El suceso imposible ($\emptyset$) para la unión $A(\cup\emptyset) = A$ y el suceso seguro (Ω) para la intersección ($A \cap \Omega = A$).
- Complementario. Dado $A \in \mathcal{A}$ existe $\bar{A}$, que llamaremos suceso complementario o contrario de A, tal que $A \cup \bar{A} = \Omega$ y $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

Álgebra de sucesos. Propiedades

- Idempotente. $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$
- Simplificativa. $A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A$
- Relativas al elemento neutro. $A \cup \Omega = \Omega, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$
- Leyes de De Morgan. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Experimentos y sucesos

Ejemplo 3

Respecto al experimento del ejemplo 1 se obtienen los siguientes sucesos:

$A \cup B=$ "obtener 2, 3, 4, 5 o 6".

$A \cap B=$ "obtener 4 o 6".

$\bar{A}=$ "obtener un número impar".

$\bar{B}=$ "obtener 1 o 2".

$A \backslash B=$"obtener el 2".

$B \backslash A=$ "obtener 3 o 5".

$A \nabla B=$ "obtener 2, 3 o 5".

Experimentos y sucesos

Ejemplo 4

Respecto al experimento del ejemplo 2 se obtienen los siguientes sucesos:

$C \cup D=$ "el tiempo de ejecución es superior a 5 segundos".

$C \cap D=$ "el tiempo de ejecución está entre 10 y 15 segundos".

$\bar{C}=$ "el tiempo de ejecución es inferior o igual a 10 segundos".

$\bar{D}=$ "el tiempo de ejecución es menor o igual que 5 segundos o mayor o igual que 15 segundos".

$C \backslash D=$ "el tiempo de ejecución es mayor o igual que 15 segundos".

$D \backslash C=$ "el tiempo de ejecución es superior a 5 segundos y menor o igual que 10 segundos".

$C \nabla D=$ "el tiempo de ejecución está en $(5,10] \cup [15,\infty)$".

Definición de probabilidad

Definición axiomática de Kolmogorov

La probabilidad (P) asociada a un experimento aleatorio es una aplicación del álgebra de sucesos ($\mathcal{A}$) en $\mathbb{R}$

$$P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$

verificando los siguientes axiomas:

1. Para todo suceso A, $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. ($\sigma-$aditividad) Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de sucesos incompatibles dos a dos, entonces:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Definición de probabilidad

Definición

Llamaremos espacio de probabilidad a la terna, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ formada por el espacio muestral (Ω), el álgebra de sucesos $(\mathcal{A})$ y la aplicación (P) verificando los anteriores axiomas.

Ejemplo 5

En relación con el experimento del ejemplo 1, puede definirse la función de probabilidad a partir de la probabilidad de los sucesos elementales, $A_i =$ "obtener el número i", de la siguiente forma: $P(A_i) = \frac{1}{6}, \quad i = 1, 2, \ldots, 6$

Ejemplo 6

En relación con el experimento del ejemplo 2, puede definirse la función de probabilidad a partir de la probabilidad de sucesos de la forma $A_t =$ "la duración de la ejecución del programa es inferior a t segundos", como $P(A_t) = 1 - e^{-t}$ $(t > 0)$.

Definición de probabilidad

Propiedades

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Si $\{A_i\}_{i=1}^n$ es un conjunto de sucesos incompatibles dos a dos entonces, $P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j)$
3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
4. Para cualquier suceso A, $0 \leq P(A) \leq 1$.
5. Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$ y $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$.
6. Para dos sucesos cualesquiera A y B se verifica que, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Definición de probabilidad

Ejemplo 7

La probabilidad de que el estudiante A apruebe un examen es $0'5$, la probabilidad de que apruebe B es $0'3$ y la probabilidad de que aprueben los dos es $0'2$.

- La probabilidad de que al menos uno de los dos apruebe es $P(A \cup B) = 0'5 + 0'3 - 0'2 = 0'6$.
- La probabilidad de que exactamente uno de los dos apruebe es $P(A \nabla B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0'4$.
- La probabilidad de que no apruebe ni A ni B es $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0'6 = 0'4$.
- La probabilidad de que apruebe A pero no B es $P(A \cap \bar{B}) = P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B) = 0'5 - 0'2 = 0'3$.

Definición de probabilidad

Ejemplo 8

Supóngase que la probabilidad de obtener el número i al lanzar un dado es inversamente proporcional a dicho número. Calcular la probabilidad de obtener un número par en una tirada.

Llamamos $p_i = P(\text{“obtener el número } i\text{”}) = k/i$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, con k una constante por determinar, que obtenemos de la siguiente igualdad

$$\sum_{i=1}^{6} p_i = k \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i} = P(\Omega) = 1 \implies k = \frac{60}{147}$$

Por tanto, $P(\text{“obtener un número par”}) = \dfrac{55}{147}$.

Definición de probabilidad

Asignación de probabilidades

- Método de las frecuencias: Definir la probabilidad del suceso como el límite de las frecuencias realtivas.
- Método clásico: En los espacios muestrales finitos equiprobables, podemos calcular la probabilidad del suceso A como el cociente entre el número de *"casos favorables"* en que sucede A y el número de *"casos posibles"* que se pueden dar. Esta regla se conoce como definición clásica o Ley de Laplace.
- Método subjetivo: en el que una determinada persona asigna de forma subjetiva probabilidades a cada uno de los posibles resultados de un proceso según su propio juicio sobre la verosimilitud de cada resultado.

Probabilidad condicionada e independencia de sucesos

Ejemplo 9

En un curso de Estadística de 80 estudiantes aprobaron 50, de los que 35 eran chicas. La probabilidad de que haya aprobado un alumno elegido al azar es: $P(\text{aprobar}) = \frac{50}{80} = 0'625$

Pero si el número de chicas que participaron en el curso fue de 45, entonces la probabilidad de que haya aprobado un alumno elegido al azar *sabiendo que es una chica*, es:

$$\begin{aligned} P(\text{aprobar}/\text{ser chica}) &= \frac{P(\text{aprobar y ser chica})}{P(\text{ser chica})} \\ &= \frac{35/80}{45/80} = 0'777 \end{aligned}$$

Probabilidad condicionada e independencia de sucesos

Definición

Sean A y B dos sucesos cualesquiera con $P(B) > 0$. Se define la probabilidad del suceso A condicionada al suceso B y se representa por $P(A/B)$ como:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilidad condicionada. Comentarios

1. La probabilidad condicionada es muy importante en la práctica, ya que, en muchas situaciones, pequeñas modificaciones en la información básica producen cambios sustanciales en las probabilidades condicionadas.
2. Con la definición anterior, es fácil probar que la probabilidad condicionada a un suceso B verifica la axiomática de la probabilidad dada en la definición.
3. Es importante diferenciar entre $P(AB)$ y $P(A/B)$: la primera indica la probabilidad de ocurrencia de A y B conjuntamente, por tanto siempre es menor o igual que $P(A)$; y la segunda indica la probabilidad de ocurrencia de A cuando es conocido que ha ocurrido el suceso B y puede ser menor, igual o mayor que $P(A)$.

Ejemplo 10

En un almacén se dispone de diez motores de los cuales tres son defectuosos. Si se eligen dos motores al azar y Denominando por D_i al suceso "el motor elegido en lugar i-ésimo es defectuoso" y N_i al suceso "el motor elegido en lugar i-ésimo es no defectuoso", se pueden calcular las siguientes probabilidades condicionadas

1. $P(D_2/N_1) = \frac{P(N_1 \cap D_2)}{P(N_1)} = \frac{7/10 \cdot 3/9}{7/10} = \frac{3}{9}$
2. $P(D_2/D_1) = \frac{P(D_1 \cap D_2)}{P(D_1)} = \frac{3/10 \cdot 2/9}{3/10} = \frac{2}{9}$
3. $P(D_2) = \frac{3}{10}$

Ejemplo 11

En una encuesta realizada en La Coruña se ha determinado que el 40% de los encuestados lee el periódico *La Voz de Galicia*, el 15% lee *El Ideal Gallego* y el 3% lee ambos periódicos.

1. Seleccionado al azar un lector de *El Ideal Gallego*, calcular la probabilidad de que lea *La Voz de Galicia*.
   Sea V el suceso "lee *La Voz de Galicia*", e I el suceso "lee *El Ideal Gallego*", entonces $P(V/I) = \frac{P(V \cap I)}{P(I)} = \frac{3}{15} = 0'2$
2. Si se ha elegido un lector de *La Voz de Galicia*, calcular la probabilidad de que no lea *El Ideal Gallego*.
   $P(\bar{I}/V) = 1 - \frac{P(I \cap V)}{P(V)} = 1 - \frac{3}{40} = 0'925$

Ejemplo 12

En un centro de secundaria el 50% de los alumnos aprueba el Bachillerato. Se estima que si se presentasen todos los alumnos a las pruebas de Selectivo sólo suspenderían el 40% y que un 30% de los alumnos que aprobarían el Selectivo suspenden el Bachillerato. Con estos datos calcular la probabilidad de que un alumno que apruebe el Bachillerato apruebe el Selectivo.

Sea C el suceso "aprueba el Bachillerato" y S el suceso "aprueba el Selectivo", por tanto, $P(C) = 0'50$, $P(\bar{S}) = 0'40$ $P(\bar{C}/S) = 0'30$.

La probabilidad pedida es

$$P(S/C) = \frac{P(S \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C/S)P(S)}{P(C)} = \frac{0'70\ 0'60}{0'50} = 0'84$$

Regla del producto

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sucesos tales que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0.$

Entonces:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) =$$

$$= P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)\cdots P\left(A_n \Big/ \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right)$$

Ejemplo 13

En relación con el ejemplo 10, si se eligen cuatro motores al azar, sin reemplazamiento, calcular la probabilidad de que el primer y el tercer motores elegidos sean defectuosos y los otros dos no.

$$P(D_1 N_2 D_3 N_4) =$$

$$= P(D_1)P(N_2/D_1)P(D_3/D_1 N_2)P(N_4/D_1 N_2 D_3) =$$

$$= \frac{3}{10}\,\frac{7}{9}\,\frac{2}{8}\,\frac{6}{7} = \frac{1}{20} = 0'05$$

Probabilidad condicionada e independencia de sucesos

Definición

Dos sucesos A y B se dicen independientes si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

o, equivalentemente, $P(A/B) = P(A)$, si $P(B) > 0$, o bien $P(B/A) = P(B)$, si $P(A) > 0$.

Independencia de sucesos. Comentarios

1. La independencia de sucesos puede suponerse en algunas situaciones y deducirse del contexto del problema pero, en general, debe comprobarse experimentalmente.
2. No debe confundirse sucesos independientes con sucesos incompatibles.
3. Si A y B son sucesos independientes también lo son A y $\bar{B}$, $\bar{A}$ y B y $\bar{A}$ y $\bar{B}$.
4. Los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son mutuamente independientes si $P\left(\bigcap_{h=1}^{k} A_{j(h)}\right) = \prod_{h=1}^{k} P\left(A_{j(h)}\right)$ para cualesquiera índices $1 \leq j(1) < j(2) < \cdots < j(k) \leq n$.

Ejemplo 14

Consideremos un sistema electrónico que consta de diez componentes que funcionan independientemente teniendo cada uno una probabilidad de fallo de $0'05$. Calcular la *fiabilidad del sistema* (probabilidad de que el sistema funcione correctamente).

Si denominamos C_i al suceso "la componente i-ésima funciona correctamente", donde $i = 1, \ldots, 10$, con $P(C_i) = 0'95$, la fiabilidad del sistema es

$$P(C_1 C_2 \ldots C_{10}) = 0'95^{10} = 0'598$$

Ejemplo 14

Para aumentar la fiabilidad del sistema, se conectan en paralelo dos sistemas iguales al descrito. Calcular la fiabilidad del nuevo sistema.

Sea S_j el suceso "el sistema j funciona correctamente", con $j = 1, 2$. Dado que $P(S_j) = 0'598$, la fiabilidad del nuevo sistema es

$$P(S_1 \cup S_2) = 0'598 + 0'598 - 0'598^2 = 0'838$$

Si conectásemos en paralelo tres sistemas como el primero, ¿cuál sería la fiabilidad del sistema resultante?

La fiabilidad de este último sistema es $P(S_1 \cup S_2 \cup S_3) = 0'935$

Teorema de Bayes

Teorema de las probabilidades totales

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos, con $P(A_i) > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, y sea B un suceso cualquiera. Entonces

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)$$

Teorema de Bayes

Ejemplo 15

En una escuela técnica el 50% de los alumnos es de primer curso, el 30% es de segundo y el 20% de tercero. De la encuesta de evaluación de profesorado se sabe que el 60% de los alumnos de primero tiene buena opinión del profesorado, al igual que el 70% de los de segundo y el 75% de los de tercero. Elegido un alumno al azar ¿cuál es la probabilidad de que tenga una buena opinión del profesorado?

Teorema de Bayes

Ejemplo 15

Si consideramos el suceso $B =$ "tener buena opinión del profesorado" y el sistema completo de sucesos formado por $I =$ "ser de primero", $S =$ "ser de segundo" y $T =$ "ser de tercero", la probabilidad pedida es:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap \Omega) = P(B \cap (I \cup S \cup T)) \\ &= P(B \cap I) + P(B \cap S) + P(B \cap T) \\ &= P(B/I)P(I) + P(B/S)P(S) + P(B/T)P(T) \\ &= 0'6 \cdot 0'5 + 0'7 \cdot 0'3 + 0'75 \cdot 0'2 = 0'66 \end{aligned}$$

Teorema de Bayes

Ejemplo 16

En una estación de ITV (Inspección Técnica de Vehículos) hay dos equipos de inspección, el equipo A rechaza el 30% de los coches inspeccionados y el equipo B no rechaza ningún coche. Si llegan tres coches a la estación y cada uno elige al azar uno de los dos equipos de inspección, ¿cuál es la probabilidad de que los tres coches superen la inspección?

Teorema de Bayes

Ejemplo 16

Sean los sucesos $A =$ "elegir equipo A", $B =$"elegir equipo B" y $S =$ "superar la inspección", por el teorema de las probabilidades totales se obtiene

$$P(S) = P(S/A)P(A) + P(S/B)P(B) = 0'7 \cdot 0'5 + 1 \cdot 0'5 = 0'85$$

Denominemos S_i al suceso "el coche i supera la inspección", con $i = 1, 2, 3$. Por la independencia de estos sucesos, la probabilidad pedida es

$$P\left(S_1 \cap S_2 \cap S_3\right) = 0'85^3 = 0'6141$$

Teorema de Bayes

Teorema de Bayes

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos, con $P(A_i) > 0$ para $i = 1, \ldots, n$, (probabilidades a priori) y sea B un suceso cualquiera, con $P(B) > 0$. Entonces, para $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_jB)}{P(B)} = \frac{P(B/A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)},$$

llamadas probabilidades a posteriori.

Teorema de Bayes

Ejemplo 17

Se dispone de dos métodos para transmitir un mensaje, el método A transmite correctamente el 70% de los mensajes y el método B el 90%. Un día se elige un método al azar y se transmiten ocho mensajes comprobándose posteriormente que los dos primeros se han transmitido de forma incorrecta. ¿Cuál es la probabilidad de que se haya utilizado el método A? ¿Cuál es la probabilidad de que se haya utilizado el método B?

Teorema de Bayes

Ejemplo 17

Sean los sucesos $A =$ "se utiliza el método A" y $B =$ "se utiliza el método B", con probabilidades $P(A) = P(B) = 0'5$. Denominemos M al suceso "se envían ocho mensajes, los dos primeros de forma incorrecta", entonces

$$P(M/A) = 0'3^2 \cdot 0'7^6 = 0'01059$$

$$P(M/B) = 0'1^2 \cdot 0'9^6 = 0'00531$$

$$P(A/M) = \frac{0'5 \cdot 0'01059}{0'5 \cdot 0'01059 + 0'5 \cdot 0'00531} = 0'666$$

La probabilidad $P(B/M)$ también puede calcularse utilizando Bayes, o directamante: $P(B/M) = 1 - P(A/M) = 0'334$

Teorema de Bayes

Ejemplo 18

En un examen tipo test con cinco posibles respuestas, la probabilidad de que Juan sepa la respuesta es $0'6$, la probabilidad de que responda al azar es $0'2$ y la probabilidad de que no responda es $0'2$. Si el estudiante respondió correctamente ¿cuál es la probabilidad de que realmente sepa la respuesta?

Teorema de Bayes

Ejemplo 18

Sean los sucesos $S=$ “Juan sabe la respuesta”, $A=$ “Juan responde al azar” y $N=$ “Juan no responde”, con probabilidades: $P(S)=0'6$, $P(A)=0'2$ y $P(N)=0'2$. Sea C el suceso “Juan respondió correctamente”, se verifica que $P(C/S)=1$, $P(C/A)=1/5=0'2$ y $P(C/N)=0$. Por el teorema de Bayes se obtiene:

$$P(S/C)=\frac{0'6\cdot 1}{0'6\cdot 1+0'2\cdot 0'2+0'2\cdot 0}=\frac{0'6}{0'64}=0'9375$$

análogamente, $P(A/C)=\frac{0'04}{0'64}=0'0625$ y, $P(N/C)=\frac{0}{0'64}=0$

Análisis combinatorio

Definición

Sean n y k dos números naturales tales que $k \leq n$, se define el número combinatorio $\binom{n}{k}$ como,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n^{(k)}}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1}$$

- El número combinatorio $\binom{n}{k}$ también se notará $C_{n,k}$.
- Este número se conoce como *coeficiente binomial*, por aparecer en el *teorema binomial o binomio de Newton*,

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

Análisis combinatorio

Propiedades

1. $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1.$
2. $\binom{n}{1} = n.$
3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$
4. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n.$

Variaciones

Considérese un conjunto de M elementos distinguibles. Se denominan variaciones de M elementos tomados de n en n a los diferentes grupos de n elementos que pueden formarse de modo que dos grupos se diferencien en que tienen algún elemento distinto o por la ordenación de sus elementos.
El número de variaciones es:

$$V_{M,n} = M^{(n)} = M(M-1)(M-2)\cdots(M-n+1)$$

Las variaciones de M elmentos tomados de n en n son las diferentes muestras ordenadas de tamaño n seleccionadas en un muestreo sin reemplazamiento de una población de M individuos.

Variaciones con repetición

Si al formar los grupos que constituyen las variaciones, los elementos pueden tomarse repetidos, se obtienen las variaciones con repetición de M elementos tomados de n en n. El número de variaciones con repetición es:

$$VR_{M,n} = M^n$$

Las variaciones con repetición de M elementos tomados de n en n son las diferentes muestras ordenadas de tamaño n seleccionadas en un muestreo con reemplazamiento de una población de M individuos.

Permutaciones

Se denominan permutaciones de M elementos distinguibles a las diferentes ordenaciones que pueden hacerse con los M elementos.

El número de permutaciones es:

$$P_M = M! = M(M-1)(M-2)\cdots 1$$

Las permutaciones de M elementos coinciden con las variaciones de M elementos tomados de M en M.

Permutaciones con repetición

Considérese un conjunto de M elementos de r tipos distintos, de manera que el primer tipo se repite n_1 veces, el segundo n_2 veces, ..., el r-ésimo n_r veces, con $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = M$. A las diferentes ordenaciones de este conjunto de M elementos se las denomina permutaciones con repetición de M elementos.

El número de permutaciones con repetición es:

$$PR_M^{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \frac{M!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_r!}$$

Las permutaciones con repetición representan las diferentes particiones de r grupos que pueden hacerse en un colectivo de M individuos, de forma que en el primer grupo haya n_1 individuos, n_2 en el segundo,... n_r en el r-ésimo.

Combinaciones

Considérese un conjunto de M elementos distinguibles. Se denominan combinaciones de M elementos tomados de n en n a los diferentes grupos de n elementos que pueden formarse de modo que dos grupos se diferencien en que tienen algún elemento distinto (no importa el orden).
El número de combinaciones es:

$$C_{M,n} = \binom{M}{n} = \frac{M!}{n!(M-n)!} = \frac{M(M-1)\cdots(M-n+1)}{n!}$$

Las combinaciones de M elementos tomados de n en n son las diferentes subpoblaciones (muestras en las que no se considera el orden) de tamaño n seleccionadas en un muestreo sin reemplazamiento de una población de M individuos.

Combinaciones con repetición

Si al formar los grupos que constituyen las combinaciones los elementos pueden tomarse repetidos, se obtienen las **combinaciones con repetición** de M elementos tomados de n en n.

El número de combinaciones con repetición es:

$$CR_{M,n} = \binom{M+n-1}{n}$$

Las combinaciones con repetición de M elementos tomados de n en n son las diferentes subpoblaciones de tamaño n seleccionadas en un muestreo con reemplazamiento de una población de M individuos.