# Part I

# Variables aleatorias unidimensionales

# Definición de variable aleatoria

## Definición

Dado un experimento aleatorio, con espacio muestral asociado $\Omega$, una variable aleatoria es cualquier función, $X$,

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

que asocia a cada suceso elemental un número real, verificando que, para cualquier número real $r$, es un suceso el conjunto

$$\{w \in \Omega \text{ tales que } X(w) \leq r\} = X^{-1}\left((-\infty, r]\right)$$

# Definición de variable aleatoria

## Ejemplo 1

Se examinan las piezas producidas por una máquina. Representando por $D$ el resultado "la pieza producida es defectuosa", sobre el espacio muestral $\Omega = \{D, \overline{D}\}$ puede definirse la variable aleatoria $X$ :

$$X(w) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad w = D \\ 0 & \text{si} \quad w = \overline{D} \end{cases}$$

$X$ es una variable aleatoria ya que $X^{-1}((-\infty, r])$ es un suceso:

$$X^{-1}((-\infty, r]) = \begin{cases} \phi & r < 0 \\ \{\overline{D}\} & 0 \leq r < 1 \\ \Omega & r \geq 1 \end{cases}$$

# Definición de variable aleatoria



## Propiedades

1. Si $X$ es una variable aleatoria definida sobre un espacio muestral $\Omega$ y $c$ es una constante cualquiera, $cX$ es una variable aleatoria sobre el mismo espacio.
2. Si $X$ e $Y$ son dos variables aleatorias, su suma $X + Y$ y su producto $XY$ son también variables aleatorias.
3. En general, cualquier función medible de variables aleatorias es también una variable aleatoria.

# Definición de variable aleatoria

## Función de distribución de una variable aleatoria

La función de distribución de una variable aleatoria $X$ es una función real que a cada número real $x$ le asocia la probabilidad de que la variable tome valores menores o iguales que dicho número, esto es:

$$F(x) = P(X \leq x) = P\left(\{w \in \Omega \text{ tales que } X(w) \leq x\}\right)$$

$$= P(X^{-1}((-\infty, x]))$$

La definición de $F$ está garantizada porque el conjunto $X^{-1}((-\infty, x])$ es un suceso.

## Propiedades de la función de distribución

1. $0 \leq F(x) \leq 1$.
2. $F$ es no decreciente $(x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2))$.
3. $F(+\infty) = 1 \left( \lim_{x \to \infty} F(x) = 1 \right)$.
4. $F(-\infty) = 0 \left( \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \right)$.
5. $F$ es continua por la derecha $\left( F(x^+) = \lim_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x) \right)$.

# Variables aleatorias discretas

## Definición

Una variable aleatoria discreta es aquella que sólo puede tomar valores dentro de un conjunto finito o infinito numerable.

## Ejemplos

- En un proceso de control de calidad se analiza el porcentaje de piezas defectuosas fabricadas, asociando "pieza defectuosa" con 1 y "pieza no defectuosa" con 0.
- Lanzar dos dados de seis caras equiprobables, se considera como variable la correspondencia que asocia a cada resultado la "suma de los valores aparecidos".
- "el número de conexiones a Internet a lo largo de un mes", "el número de piezas producidas antes de la primera defectuosa", etc.

# Variables aleatorias discretas

## Función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta

- Sea $X$ una v.a. discreta que toma los valores $x_i$ con $p_i = P(X = x_i)$, con $\sum_i p_i = 1$. Se denomina función de masa de probabilidad o función de probabilidad de $X$ a la función que asigna a cada $x_i$ su probabilidad $p_i$.
- La función de distribución de una variable discreta es: $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$
- La función $F$ es escalonada, no decreciente, con saltos de discontinuidad en los puntos $x_i$. El valor del salto en $x_i$ coincide con la probabilidad, $p_i$, de dicho valor.

## Ejemplo 1

Sea $X =$ "suma de los puntos obtenidos al lanzar dos dados", la función de masa de probabilidad es:

$$\begin{aligned}
p_1 &= P(X=2) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36} \\
p_2 &= P(X=3) = P(\{(1,2),(2,1)\}) = \frac{2}{36} \\
p_3 &= P(X=4) = P(\{(2,2),(1,3),(3,1)\}) = \frac{3}{36} \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
p_{11} &= P(X=12) = P(\{(6,6)\}) = \frac{1}{36}
\end{aligned}$$

## Ejemplo 1

Su función de distribución es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 2 \\ 1/36 & \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \\ 3/36 & \text{si} \quad 3 \leq x < 4 \\ 6/36 & \text{si} \quad 4 \leq x < 5 \\ 10/36 & \text{si} \quad 5 \leq x < 6 \\ 15/36 & \text{si} \quad 6 \leq x < 7 \\ 21/36 & \text{si} \quad 7 \leq x < 8 \\ 26/36 & \text{si} \quad 8 \leq x < 9 \\ 30/36 & \text{si} \quad 9 \leq x < 10 \\ 33/36 & \text{si} \quad 10 \leq x < 11 \\ 35/36 & \text{si} \quad 11 \leq x < 12 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 12 \end{cases}$$

# Variables aleatorias continuas

## Definición

Una variable aleatoria continua es aquella que toma valores en uno o varios intervalos de la recta real.

## Ejemplos

- “la hora de llegada de un profesor a su despacho”.
- “la duración de una llamada telefónica”.
- “la cantidad de lluvia caída por metro cuadrado en una determinada zona”.
- “la superficie de planchas metálicas producidas en una factoría”.

## Función de densidad de una variable aleatoria continua

- Dada una variable aleatoria continua $X$ su función de densidad es la función real de variable real:

$$f(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{P(x - h \leq X \leq x + h)}{2h}$$

- De la definición anterior, se deduce que $f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$
- Dada una variable continua $X$, con función de densidad $f$, su función de distribución es $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

# Variables aleatorias continuas

## Propiedades de la función de densidad

1. $f(x) \geq 0$, $-\infty < x < \infty$. El conjunto de valores donde $f(x) > 0$ se llama soporte de $X$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(+\infty) = 1$
3. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$
4. $F(x_0) = P(X \leq x_0)$ mide el área de la región limitada por la función de densidad, el eje de abscisas y la recta $x = x_0$.
5. $P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)dt = 0$
6. En general, cualquier función real que verifica las propiedades 1 y 2 es la función de densidad de alguna variable aleatoria continua $X$.

## Ejemplo 2

Un profesor llega cada día a su despacho con igual probabilidad entre las 8 y las 9 horas. ¿Cuál es la función de densidad de la variable $X =$ "hora de llegada al despacho"? ¿Cuál es la probabilidad de que llegue antes de las ocho y media?

Se trata de una variable continua con función de densidad de $X$ es:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 8 < x < 9 \\ 0 & \text{si} \quad x \notin (8,9) \end{cases}$$

La probabilidad de que llegue antes de las ocho y media es:

$$P(X \leq 8'5) = \int_8^{8'5} 1dx = 0'5$$

## Ejemplo 3

Dada una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2/8 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x \notin (0,2) \end{cases}$$

su función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^3/8 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La probabilidad de que la variable tome valores entre $1'5$ y 2:
$P(1'5 < X < 2) = \int_{1'5}^{2} \frac{3t^2}{8} dt = 0'578$

# Variables aleatorias continuas

## Ejemplo 4

En el caso de la variable "duración de una llamada de teléfono", se puede proponer como función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Su función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

# Variables aleatorias mixtas

## Definición

Una variable que tome unos valores puntuales con probabilidad dada, y el resto de los valores los tome dentro de uno o varios intervalos siguiendo una determinada función de densidad, se dirá que es una variable aleatoria con distribución mixta.

## Comentario

Por simplicidad, en la definición anterior se está usando el concepto de función de densidad en un sentido amplio, pues, si una variable sigue un modelo mixto de distribución, es evidente que la probabilidad acumulada en los intervalos en que ésta se comporta de modo continuo (igual al valor de la integral de la función de densidad en dichos intervalos) es inferior a la unidad.

## Ejemplo 5

Se define la variable mixta $X$ que toma los valores $-1$ y $0$, con probabilidades respectivas $0'1$ y $0'2$, y que toma valores en el intervalo $(1,2)$ de acuerdo con la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} k(2x-1) & \text{si } x \in (1,2) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El valor de $k = 0'35$ verifica que la suma de todas las probabilidades es 1, obtenido resolviendo:

$$\begin{aligned} 1 &= P(X=-1) + P(X=0) + P\left(X \in (1,2)\right) \\ &= 0'1 + 0'2 + \int_1^2 k(2x-1)dx \end{aligned}$$

# Razón de fallo de una variable continua

## Definición

Sea $T$ la variable aleatoria "tiempo de vida de una componente o sistema", y sea $F(t)$ su función de distribución. La función de fiabilidad o de supervivencia de la variable aleatoria $T$ es:
$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t), \qquad t > 0$

## Definición

La razón de fallo de una componente o sistema es la proporción de unidades que fallan en un intervalo de tiempo $(t, t + dt)$, con respecto a las que siguen funcionando en $t$. Esto es:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = -\frac{R'(t)}{R(t)}$$

# Razón de fallo de una variable continua



## Ejemplo 6

Dada la variable aleatoria con función de densidad

$$f(t) = \begin{cases} 24t^2 \exp(-(2t)^3) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

sus funciones de fiabilidad y razón de fallo son:

$$R(t) = 1 - F(t) = \begin{cases} \exp(-(2t)^3) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \begin{cases} 24t^2 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

# Razón de fallo de una variable continua

## Ejemplo 7

Si la duración de una componente electrónica es una variable aleatoria $T$, con función de densidad

$$f(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

sus funciones de fiabilidad y razón de fallo son:

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\alpha t}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \alpha$$

La razón de fallo es constante y la variable no tiene memoria.

# Transformación de variables aleatorias

- En general, si $F_Y$ es la función de distribución de la nueva variable transformada, $Y = g(X)$, se tendrá:
$F_Y(y) = P\left(g(X) \leq y\right) = P\left(X \in g^{-1}\left((-\infty, y]\right)\right)$
- Si $X$ es discreta con valores $x_i$ y probabilidades $p_i$, la nueva variable, $Y = g(X)$, es también discreta, con función de masa de probabilidad:

$$P(Y = y_j) = P(g(X) = y_j) = \sum_i P(x_i \text{ tal que } g(x_i) = y_j)$$

- Si $X$ es continua con densidad $f_X$ y $g$ es continua y monótona, con inversa $g^{-1}$, la densidad de $Y = g(X)$, es

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|$$

## Ejemplo 7

Calculemos la función de densidad de la variable $Y = g(X) = aX + b$, siendo $X$ una variable continua con función de densidad $f_X$.

$$X = g^{-1}(Y) = \frac{Y-b}{a} \Rightarrow \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| = \left|\frac{1}{a}\right|$$

Por tanto, la función de densidad de la variable transformada $Y$ es

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\left|\frac{1}{a}\right|$$

## Ejemplo 7

Así, si

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

se tiene que:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \left|\frac{1}{a}\right| \exp\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{si } y > b \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Si la función $g$ no tiene una única inversa, sino que posee un número finito de inversas $g_i^{-1}(y)$, la función de densidad de la nueva variable $Y = g(X)$ se obtiene mediante la expresión:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} f_X(g_i^{-1}(y)) \left| \frac{dg_i^{-1}(y)}{dy} \right|$$

# Transformación de variables aleatorias

## Ejemplo 8

La densidad y distribución de $Y = g(X) = X^2$, con $X$ una variable continua con densidad $f_X$ y distribución $F_X$ se calculan de la siguiente manera:

$$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y} \Rightarrow g_1^{-1}(y) = +\sqrt{y}, \qquad g_2^{-1}(y) = -\sqrt{y}$$

$$\frac{dg_1^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad \frac{dg_2^{-1}(y)}{dy} = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

## Ejemplo 8

Por tanto se concluye que

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \sum_{i=1}^{n} f_X(g_i^{-1}(y)) \left| \frac{dg_i^{-1}(y)}{dy} \right| \\
&= \begin{cases} f_X\left(\sqrt{y}\right) \frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X\left(-\sqrt{y}\right) \frac{1}{2\sqrt{y}} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

y

$$
F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) =
$$

$$
= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})
$$

# Características de una variable aleatoria

## Definición

Sea $X$ una variable aleatoria discreta que toma los valores $x_i$ con probabilidades $p_i$. Supuesto que $\sum_i |x_i| \, p_i < \infty$, se define la media, valor esperado o esperanza matemática de la variable $X$ como el número real: $\mu = E(X) = \sum_i x_i p_i$

## Definición

Sea $X$ una variable aleatoria continua con función de densidad $f$. Supuesto que $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \, f(x) dx < \infty$, se define la media, valor esperado o esperanza matemática de la variable $X$ como el número real: $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

# Características de una variable aleatoria

## Propiedades de la esperanza

1. $E\left(aX+b\right)=aE\left(X\right)+b$
2. $E\left(X+Y\right)=E\left(X\right)+E\left(Y\right)$
3. Si $X$ es discreta con valores $x_i$, y probabilidades $p_i$, la media de $Y=g(X)$ es: $E(Y)=E\left(g(X)\right)=\sum_i g(x_i)p_i$
4. Si $X$ es una variable continua con densidad $f$, la media de $Y=g(X)$ es: $E(Y)=E\left(g(X)\right)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$

## Ejemplo 9

Valor esperado de la variable $X$ = "suma de los resultados obtenidos al lanzar dos dados":

$$p_i = \begin{cases} (6-|6-i|)/36 & \text{si} \quad i = 1, 2, \ldots, 11 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{11} x_i \cdot p_i = 2\frac{1}{36} + 3\frac{2}{36} + \cdots + 12\frac{1}{36} = 7$$

## Ejemplo 10

Media de la variable aleatoria continua cuya función de densidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 8 \leq x \leq 9 \\ 0 & \text{si } x \notin [8,9] \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_8^9 x dx = 8'5$$

La media de $Y = g(X) = X^3$ es

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_8^9 x^3 dx = 616'25$$

## Ejemplo 11. Variable discreta que no posee media

Sea $X$ la variable aleatoria con función de probabilidad:

$$x_i = (-1)^i \frac{2^i}{i}, \ p_i = \frac{1}{2^i}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Dado que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \, p_i$ no es convergente, diremos que $X$ no tiene media.

$$\sum_{i=1}^{\infty} |X_i| \, p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{i} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$$

## Ejemplo 12. Variable continua que no posee media

Sea $X$ una variable de Cauchy, con función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty$$

Dado que no existe la $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)dx$, diremos que $X$ no tiene media.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)}dx = 2\int_{0}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}dx$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^{\infty} = \infty$$

# Características de una variable aleatoria

## Definición

Sea $X$ una variable aleatoria con media $\mu = E(X)$. Se define la varianza de $X$ como el valor esperado de los cuadrados de las diferencias con la media: $\sigma^2 = Var(X) = E[(X - E(X))^2]$

## Definición

Se define la desviación típica de la variable $X$ como la raíz positiva de la varianza: $\sigma = +\sqrt{E[(X - E(X))^2]}$

## Propiedades

1. $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.
2. $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

# Características de una variable aleatoria



## Tipificacíón de una variable aleatoria

- Una variable aleatoria se dirá que está estandarizada o tipificada, si su media es 0 y su varianza es 1.
- Para transformar una variable $X$ con media $\mu$ y desviación típica $\sigma$ en otra tipificada, basta con aplicar la transformación lineal, $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$.
- La nueva variable, $Y$, tiene media $0$ y varianza $1$.

## Otras medidas características de una variable aleatoria

- Se define el coeficiente de variación de una variable $X$, con media $\mu > 0$ y desviación típica $\sigma$, como : $CV(X) = \frac{\sigma}{\mu}$
- Se define el momento con respecto al origen de orden $r$, $\alpha_r$, de una variable aleatoria $X$ como $\alpha_r = E\left(X^r\right)$
- Se define el momento central o con respecto a la media de orden $r$, $\mu_r$, de $X$ como $\mu_r = E\left((X - E(X))^r\right)$
- $\alpha_1 = E(X)$ y $\mu_2 = Var(X)$.
- Haciendo uso del *binomio de Newton*, se tiene que:

$$\mu_r = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \alpha_{r-k} \alpha_1^k$$

## Otras medidas características de una variable aleatoria

- La mediana de una variable aleatoria es la medida de centralización que divide la distribución en dos partes de igual probabilidad. Es el valor $M_e$ que, para una variable con distribución $F$, verifica: $M_e = \inf\{x/F(x) \geq 1/2\}$
- Cuantiles de orden $p$, siendo $0 < p < 1$, son los valores $Q_p$, que dejan un $100p\%$ de la distribución de probabilidad a su izquierda. Esto es: $Q_p = \inf\{x/F(x) \geq p\}$
- Los cuantiles más usados son $Q_{\frac{1}{4}}$, $Q_{\frac{1}{2}}$ y $Q_{\frac{3}{4}}$ que se denominan también primer, segundo y tercer cuartil.
- Recorrido intercuartílico $RI = Q_{\frac{3}{4}} - Q_{\frac{1}{4}}$

# Características de una variable aleatoria

## Otras medidas características de una variable aleatoria

- La moda de una variable es el valor $M_0$ que maximiza la función de probabilidad o la función de densidad, según se trate de una variable discreta o continua, respectivamente.
- El coeficiente de asimetría es el cociente $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$
- Si $\gamma_1$ es $0$ la distribución es simétrica. En otro caso presentará asimetría positiva o negativa de acuerdo con el signo de $\gamma_1$.
- El coeficiente de apuntamiento o curtosis es el número $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$
- Si $\gamma_2$ es $0$ la distribución presenta una forma similar a la distribución normal.

## Ejemplo 13

Vamos a calcular algunas de las medidas características de la distribución continua que tiene por función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 0'1 & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Media y varianza:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{10} \frac{1}{10} x dx = 5$$

$$\sigma^2 = E\left((x-5)^2\right) = \int_0^{10} \frac{1}{10}(x-5)^2 dx = 8'3333$$

## Ejemplo 13

- Coeficiente de variación: $CV = \frac{\sigma}{\mu} = 0'57735$
- Momentos con respecto al origen:

$$\alpha_k = \int_0^{10} \frac{1}{10} x^k dx = \left[ \frac{x^{k+1}}{(k+1)\,10} \right]_0^{10} = \frac{10^k}{k+1}$$

- Momentos centrales o respecto a la media:

$$\mu_k = \int_0^{10} \frac{1}{10} (x-5)^k dx = \left[ \frac{(x-5)^{k+1}}{10(k+1)} \right]_0^{10}$$

en particular, $\mu_3 = 0$ y $\mu_4 = 125$.

# Características de una variable aleatoria

## Ejemplo 13

- Al tratarse de una variable continua, el cuartil $Q_p$ es el valor de la variable que verifica que $F(Q_p) = p$, siendo $F$ la función de distribución de la variable:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{10} & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \\ 1 & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

- La mediana es el valor $M_e$ que verifica que $F(M_e) = 1/2$ :

$$F(M_e) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{M_e}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow M_e = 5$$

### Ejemplo 13

- Los cuantiles de orden $p$ serán aquellos valores $Q_p$ tales que

$$F(Q_p) = p \Rightarrow \frac{Q_p}{10} = p \Rightarrow Q_p = 10p$$

- Recorrido intercuartílico: $RI = Q_{\frac{3}{4}} - Q_{\frac{1}{4}} = 5$
- Como $\gamma_1 = 0$ y $\gamma_2 = -1'2$, la distribución es simétrica y platicúrtica (más aplastada que la normal).