Part VIII

Estimación por inervalos de confianza

Conceptos generales

Intervalo de confianza

Dada una m.a.s. $X_1, X_2, \ldots, X_n$, se llama intervalo de confianza para un parámetro θ, con nivel o coeficiente de confianza $1-\alpha$, $0<\alpha<1$, a un intervalo aleatorio

$$\left(\widehat{\theta}_1(X_1, X_2, \ldots, X_n), \widehat{\theta}_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right)$$

tal que, para cada $\theta \in \Theta$,

$$P\left(\widehat{\theta}_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) < \theta < \widehat{\theta}_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right) = 1-\alpha$$

Intervalo de confianza

- Para una realización de la muestra, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se obtiene un intervalo numérico

$$\left(\widehat{\theta}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \widehat{\theta}_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right)$$

que se llama también intervalo de confianza.

- Si se toman infinitas realizaciones, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de la muestra aleatoria y se construyen los correspondientes intervalos numéricos

$$\left(\widehat{\theta}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \widehat{\theta}_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right)$$

el $100(1-\alpha)\%$ de los mismos contienen el valor del parámetro, mientras que los restantes, $100\alpha\%$, no.

Método de la cantidad pivotal

- Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. de X, cuya distribución depende de θ, y sea $W = W(X_1, \ldots, X_n; \theta)$ un estadístico cuya distribución no depende de θ, llamado estadístico pivote.
- Fijado $1 - \alpha$ se determinan a y b tales que

$$P\left(a < W(X_1, \ldots, X_n; \theta) < b\right) = 1 - \alpha$$

- Despejando θ se obtienen variables $\widehat{\Theta}_1^{-1}(X_1, \ldots, X_n)$ y $\widehat{\Theta}_2^{-1}(X_1, \ldots, X_n)$, tales que, para cualquier θ,

$$P\left(\widehat{\Theta}_1^{-1}(X_1, \ldots, X_n) < \theta < \widehat{\Theta}_2^{-1}(X_1, \ldots, X_n)\right) = 1 - \alpha$$

Ejemplo

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple de una población con distribución teórica $N(\mu, \sigma)$, donde σ, es una constante conocida. Obtener un intervalo de confianza para μ.

Conceptos generales

Ejemplo

- $\overline{X} \in N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, entonces $W = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0,1)$.
- Fijado un nivel de confianza $1-\alpha$, se tiene

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) \\ &= P\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

- El intervalo de confianza es

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Conceptos generales

Intervalos de confianza. Comentarios

- ¿Cómo elegir el estadístico pivote?: debe ser una función de la muestra y del parámetro, cuya distribución en el muestreo sea independiente del parámetro. se puede elegir el estimador de máxima verosimilitud de θ, $\widehat{\theta}$, ya que $W = \dfrac{\widehat{\theta} - \theta}{\sigma\left(\widehat{\theta}\right)}$ tiene distribución asintóticamente $N(0,1)$.
- ¿Cómo determinar las constantes a y b?: interesará elegir a y b de forma tal que el intervalo de confianza sea de longitud mínima.
- ¿Cómo elegir α?: se elegirá según la confianza deseada, teniendo en cuenta que, en general, a menor α, el intervalo será más largo. Normalmente, se suele tomar como α uno de los valores $0'1$, $0'05$ o $0'01$.

Intervalos para una muestra. Intervalos de confianza para la media

Intervalo de confianza para la media de una población normal, con desviación típica conocida

- Un intervalo de confianza para la media de una población normal, cuando σ es conocida, es

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

siendo $z_{\alpha/2}$ tal que $\Phi\left(z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha/2.$

- Este caso no suele darse en la práctica, dado que lo más habitual es que se desconozca la desviación típica.

Intervalo de confianza para la media de una población normal, con desviación típica desconocida

- Si $X_1, \ldots, X_n$ es una m.a.s. de $X \in N(\mu, \sigma)$,

$$W = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \cdot \left(\sqrt{\frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\sigma^2(n-1)}} \right)^{-1} = \frac{\overline{X} - \mu}{\widehat{S}/\sqrt{n}} \in t_{n-1}$$

- Fijado un nivel de confianza $1-\alpha$ el I.C. para μ es:

$$\left(\overline{X} - t_{n-1,\alpha/2} \frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{n-1,\alpha/2} \frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}} \right)$$

con $t_{n-1,\alpha/2}$ el punto crítico de la distribución t_{n-1}.

Intervalo de confianza para la media con muestras grandes

Aunque la población base no sea normal, por el T.C.L. la distribución de $\overline{X}$ es aproximadamente $N\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$.

- Si σ es conocida, un I.C. para μ con nivel aproximado $1-\alpha$ es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

- Si σ es desconocida un I.C. para μ con nivel aproximado $1-\alpha$ es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\widehat{S}}{\sqrt{n}}\right)$$

Intervalo de confianza para la media. Determinación del tamaño muestral

¿Cuál debe ser el tamaño muestral necesario para que, fijado un nivel de confianza, se alcance una precisión (o longitud) deseada en el intervalo?

- σ conocida. Despejando n de $L = 2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, se obtiene $n = \frac{4z_{\alpha/2}^2\sigma^2}{L^2}$
- σ desconocida. Aproximando $t_{n-1,\alpha/2}$ por $z_{\alpha/2}$, se toma una muestra preliminar para estimar σ por $\widehat{S}$, resultando:

$$n = \frac{4z_{\alpha/2}^2\widehat{S}^2}{L^2}$$

Intervalos de confianza para la varianza de poblaciones normales, con media conocida

- Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a.s de una $X \in N(\mu, \sigma)$, con μ conocida.

$$W = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \in \chi_n^2$$

- Fijado el nivel $1 - \alpha$, $P\left(\chi^2_{n,1-\alpha/2} < W < \chi^2_{n,\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$
- El I.C. con confianza $1 - \alpha$ para σ^2 es

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\chi^2_{n,\alpha/2}}, \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\chi^2_{n,1-\alpha/2}} \right)$$

Estadística I

Mario Francisco

Conceptos generales

Intervalos para una muestra

Intervalos para dos muestra

Intervalos de confianza para la varianza de poblaciones normales, con media conocida

- Es bastante común tomar el intervalo de extremo inferior cero, es decir,

$$\left(0, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{n,1-\alpha}}\right)$$

- I.C. para σ, a nivel $1-\alpha$,

$$\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{n,\alpha/2}}}, \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{n,1-\alpha/2}}}\right)$$

Intervalos de confianza para la varianza de poblaciones normales, con media desconocida

- Se tiene que

$$W = \frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\sigma^2} = \frac{nS^2}{\sigma^2} \in \chi^2_{n-1}$$

- Utilizando W como estadístico pivote, los I.C., a nivel $1-\alpha$, para σ^2 son:

$$\left(\frac{nS^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}, \frac{nS^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\right) = \left(\frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}, \frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\right)$$

Intervalos para una muestra. Intervalos de confianza para la varianza de poblaciones normales

Intervalos de confianza para la varianza de poblaciones normales, con media desconocida

- Si tomamos el cero como extremo inferior, el intervalo para σ^2 es:

$$\left(0, \frac{nS^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha}}\right) = \left(0, \frac{(n-1)\widehat{S}^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha}}\right)$$

- Las raíces cuadradas de los extremos de los intervalos anteriores proporcionan los extremos de los intervalos de confianza para la desviación típica, supuesto desconocido el valor de media.

Intervalos de confianza para una proporción

- Construir un I.C. para la proporción de elementos, p, de una población que poseen determinada característica de interés, a partir de la información obtenida en una m.a.s. de elementos de la población. Dispondremos de una muestra aleatoria simple, $X_1, \ldots, X_n$, de una variable de Bernoulli de parámetro p.
- Por el T.C.L., para $n > 30$,

$$\widehat{p} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{T}{n}$$

con $T =$ "número de elementos en la muestra que presentan la característica de interés", tiene distribución aproximadamente $N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$

Intervalos para una muestra. Intervalos de confianza para una proporción

Intervalos de confianza para una proporción

- Se utiliza como estadístico pivote,

$$W = \frac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$$

que, para n grande, es aproximadamente $N(0,1)$.

- Un I.C. a nivel $1-\alpha$ para p es

$$\left(\widehat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \widehat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

con $z_{\alpha/2}$ el punto crítico de la distribución normal estándar.

Intervalos de confianza para una proporción

El I.C. anterior no es calculable, al depender del valor desconocido de p.

1. Sustituir p por su estimador $\widehat{p}$.

$$\left(\widehat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}, \widehat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right)$$

2. Considerar la situación más desfavorable, $p = 1/2$.

$$\left(\widehat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{4n}}, \widehat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{4n}}\right)$$

Determinación del tamaño muestral

- Cuál es el tamaño muestral necesario para que, con una confianza predeterminada, la longitud del intervalo sea la deseada.
- Despejando n en $L = 2z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, se obtiene:

$$n = \frac{4z^2_{\alpha/2}p(1-p)}{L^2}$$

- El problema del desconocimiento de p se sigue manteniendo, por lo que las dos soluciones apuntadas anteriormente siguen siendo igualmente válidas.

Intervalos para dos muestras. Intervalos de confianza para la diferencia de medias

Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos poblaciones normales independientes, con varianzas conocidas

- Sean $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ m.a.s. independientes de X e Y con distribuciones $N(\mu_X, \sigma_X)$ y $N(\mu_Y, \sigma_Y)$.
- Bajo los supuestos de independencia de las muestras y normalidad de X e Y,

$$\left.\begin{array}{c} \overline{X} \in N\left(\mu_X, \dfrac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right) \\ \overline{Y} \in N\left(\mu_Y, \dfrac{\sigma_Y}{\sqrt{m}}\right) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \overline{X} - \overline{Y} \in N\left(\mu_X - \mu_Y, \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}\right)$$

Intervalos para dos muestras. Intervalos de confianza para la diferencia de medias

Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos poblaciones normales independientes, con varianzas conocidas

- El estadístico

$$W = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \in N(0,1)$$

  Puede ser utilizado como estadístico pivote.

- Un I.C., a nivel $1-\alpha$, para $\mu_X - \mu_Y$ es:

$$\left(\overline{X} - \overline{Y} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}, \overline{X} - \overline{Y} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}} \right)$$

  con $z_{\alpha/2}$ el punto crítico de la distribución normal

Intervalos para dos muestras. Intervalos de confianza para la diferencia de medias

Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos poblaciones normales independientes, con varianzas desconocidas pero supuestas iguales

Dadas $\widehat{S}_X^2$ y $\widehat{S}_Y^2$ las cuasivarianzas de ambas muestras, el estimador "unido" insesgado más eficiente de la varianza común σ^2 es

$$\widehat{S}_T^2 = \frac{(n-1)\widehat{S}_X^2 + (m-1)\widehat{S}_Y^2}{n+m-2}$$

que, bajo las hipótesis de independencia y normalidad, verifica que

$$\frac{(n+m-2)\widehat{S}_T^2}{\sigma^2} \in \chi^2_{n+m-2}$$

Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos poblaciones normales independientes, con varianzas desconocidas pero supuestas iguales

- En consecuencia,

$$W = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\widehat{S}_T \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \in t_{n+m-2}$$

- Utilizando W como estadístico pivote, un intervalo de confianza para $\mu_X - \mu_Y$, a nivel $1 - \alpha$, es

$$\left((\overline{X} - \overline{Y}) \mp t_{n+m-2,\alpha/2} \widehat{S}_T \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \right)$$

Intervalos para dos muestras. Intervalos de confianza para la diferencia de medias

Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos poblaciones normales independientes, con varianzas desconocidas y que no pueden suponerse iguales

- El estadístico pivote que se utiliza en este caso es

$$W = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{\widehat{S}_X^2}{n} + \dfrac{\widehat{S}_Y^2}{m}}}$$

- Si $n \geq 30$ y $m \geq 30$, W es aproximadamente $N(0,1)$, y un I.C., al nivel $1-\alpha$, para $\mu_X - \mu_Y$, es

$$\left((\overline{X} - \overline{Y}) \mp z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\widehat{S}_X^2}{n} + \frac{\widehat{S}_Y^2}{m}} \right)$$

Intervalos para dos muestras. Intervalos de confianza para la diferencia de medias

Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos poblaciones normales independientes, con varianzas desconocidas y que no pueden suponerse iguales

- Si $n \leq 30$ o $m \leq 30$, se utiliza la aproximación de Welch: W es una $t_{n+m-2-\delta}$, siendo δ el entero más próximo a

$$\psi = \frac{[(m-1)\psi_1 - (n-1)\psi_2]^2}{(m-1)\psi_1^2 + (n-1)\psi_2^2}$$

con $\psi_1 = \frac{\hat{S}_X^2}{n}$ y $\psi_2 = \frac{\hat{S}_Y^2}{m}$.

- Un I.C., al nivel $1-\alpha$, para $\mu_X - \mu_Y$, es

$$\left((\overline{X} - \overline{Y}) \mp t_{g,\alpha/2} \sqrt{\frac{\widehat{S}_X^2}{n} + \frac{\widehat{S}_Y^2}{m}} \right)$$

Intervalos para dos muestras. Intervalos de confianza para la diferencia de medias

Determinación del tamaño muestral

Si $m = n$, ¿cuál es el n necesario para que la longitud del intervalo para la diferencia de medias, con un nivel de confianza prefijado $1-\alpha$ sea igual a una cantidad predeterminada?

- Si las varianzas poblacionales son conocidas, se obtiene $n = \frac{4z^2_{\alpha/2}\left(\sigma^2_X+\sigma^2_Y\right)}{L^2}$
- Si las varianzas son desconocidas pero pueden suponerse iguales, $n = \frac{8z^2_{\alpha/2}\widehat{S}^2_T}{L^2}$
- Si las varianzas son desconocidas y no pueden suponerse iguales, supuesto que n es suficientemente grande, $n = \frac{4z^2_{\alpha/2}\left(\widehat{S}^2_X+\widehat{S}^2_Y\right)}{L^2}$

Intervalos de confianza para la diferencia de medias con datos apareados

Cuando los datos vienen en pares (X_i, Y_i), $i = 1, \ldots, n$ que miden observaciones realizadas sobre un mismo individuo en el que ha variado una condición, se llaman datos apareados, y lo que se hace es trabajar con la diferencia de pares

$$D_i = X_i - Y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Así podemos calcular el intervalo de confianza para la media

$$\mu_D = \mu_X - \mu_Y$$

Intervalos para dos muestras. Intervalos de confianza para la razón de varianzas

Intervalos de confianza para la razón de varianzas de poblaciones normales independientes

- Dadas dos muestras normales independientes, se quiere construir I.C. para σ_Y^2/σ_X^2.
- Teniendo en cuenta las hipótesis de normalidad e independencia de ambas poblaciones,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(n-1)\widehat{S}_X^2}{\sigma_X^2} \in \chi_{n-1}^2 \\ \dfrac{(m-1)\widehat{S}_Y^2}{\sigma_Y^2} \in \chi_{m-1}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow W = \frac{\dfrac{(n-1)\widehat{S}_X^2}{\sigma_X^2}\dfrac{1}{n-1}}{\dfrac{(m-1)\widehat{S}_Y^2}{\sigma_Y^2}\dfrac{1}{m-1}} =$$

$$= \frac{\widehat{S}_X^2}{\widehat{S}_Y^2}\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \in F_{n-1,m-1}$$

Intervalos de confianza para la razón de varianzas de poblaciones normales independientes

- Utilizando W como estadístico pivote, un I.C., a nivel $1-\alpha$, para σ_Y^2/σ_X^2 es:

$$\left(F_{n-1,m-1,1-\alpha/2}\frac{\widehat{S}_Y^2}{\widehat{S}_X^2}, F_{n-1,m-1,\alpha/2}\frac{\widehat{S}_Y^2}{\widehat{S}_X^2} \right)$$

con $F_{n-1,m-1,\alpha}$ el punto crítico de la $F_{n-1,m-1}$.

- Si se toma como extremo inferior del intervalo el 0, el I.C., a nivel $1-\alpha$, es

$$\left(0, F_{n-1,m-1,\alpha}\frac{\widehat{S}_Y^2}{\widehat{S}_X^2} \right)$$

Intervalos para dos muestras. Intervalos de confianza para la diferencia de proporciones

Intervalos de confianza para la diferencia de proporciones

- Construir I.C. para la diferencia de proporciones, $p_X - p_Y$, de elementos de poblaciones independientes, X e Y, que verifican cierta característica de interés.
- Recogemos sendas muestras independientes de ambas poblaciones, $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_m$, donde X_i e Y_j $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m)$ toman el valor 1 si los respectivos individuos elegidos en la muestra presentan la característica de interés y el valor 0 en otro caso.
- Las proporciones muestrales

$$\widehat{p}_X = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \quad \text{y} \quad \widehat{p}_Y = \frac{Y_1 + \cdots + Y_m}{m}$$

Intervalos para dos muestras. Intervalos de confianza para la diferencia de proporciones

Intervalos de confianza para la diferencia de proporciones

- Si $n > 30$, $m > 30$, $W = \widehat{p}_X - \widehat{p}_Y$ es aproximadamente

$$N\left(p_X - p_Y, \sqrt{\frac{p_X(1-p_X)}{n} + \frac{p_Y(1-p_Y)}{m}}\right)$$

- Un I.C. para $p_X - p_Y$, es

$$\left(\widehat{p}_X - \widehat{p}_Y \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_X(1-p_X)}{n} + \frac{p_Y(1-p_Y)}{m}}\right)$$

- El problema del desconocimiento de p_X y p_Y se resuelve análogamente al caso de intervalos para una proporción

Intervalos para dos muestras. Intervalos de confianza para la diferencia de proporciones

Determinación del tamaño muestral

- Si $m = n$, ¿cuál es el tamaño muestral necesario para que la longitud del intervalo de confianza para la diferencia de proporciones sea igual a una cantidad predeterminada, con un nivel de confianza $1-\alpha$.
- Si $n > 30$,

$$n = \frac{4z^2_{\alpha/2}\left[p_X(1-p_X)+p_Y(1-p_Y)\right]}{L^2}$$

Determinación del tamaño muestral

- Si reemplazamos las proporciones poblacionales por las proporciones muestrales estimadas con muestras preliminares,

$$n = \frac{4z^2_{\alpha/2}\left[\widehat{p}_X(1-\widehat{p}_X)+\widehat{p}_Y(1-\widehat{p}_Y)\right]}{L^2}$$

- Si suponemos $p_X = p_Y = 1/2$,

$$n = \frac{2z^2_{\alpha/2}}{L^2}$$