APUNTES COMPLEMENTARIOS DE
FÍSICA DE LAS MÁQUINAS COMPUTACIONALES
TEMA 0: REPASO DE FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

JULIO C. BRÉGAINS
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA E SISTEMAS
FACULTADE DE INFORMÁTICA, UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Los años de estudio deben emplearse únicamente para enseñar a pensar...

Albert Einstein.

0.1. COMENTARIOS PRELIMINARES: MÉTODO QCP

Estos apuntes han sido elaborados para *complementar* los apuntes oficiales de Física de las Máquinas Computacionales. En este complemento simplemente intentaremos hacerte explícito el proceso que siempre se considera sobrentendido en la enseñanza de las asignaturas de una carrera científica o técnica: intentaremos que adquieras consciencia de los hábitos de pensamiento que potencien tu capacidad de discriminar ideas, y que puedas sentar las bases de un espíritu crítico que te permita desenvolverte con confianza y madurez a la hora de enfrentarte a los problemas que surgirán a lo largo de la carrera, y, más a futuro, en tus actividades profesionales.

Comencemos.

Para encarar los problemas y los desarrollos de teoría, lo haremos siguiendo una estructura basada en tres grupos de preguntas (método QCP):

Q) ¿QUÉ ES?, ¿QUÉ SIGNIFICA? O ¿QUÉ HAY QUE HACER?

Las dos primeras preguntas te servirán para prestar atención al concepto que se desea desarrollar o con el que se desea trabajar. El ¿Qué hay que hacer? será utilizado en la resolución de problemas, o en el desarrollo de un teorema, por ejemplo (en esta asignatura, sin embargo, no desarrollaremos teoremas).

EJEMPLO 0.1: cuando leas "*Se tiene una carga sometida a un campo eléctrico*", la pregunta ¿Qué es? (o simplemente ¿Qué?) te hará consciente de la necesidad de traducir y entender esta frase (focalizando en las palabras "carga", "sometida a" y "campo eléctrico". Básicamente, te ayudará a tomar consciencia de lo que se está hablando.

En algunos casos, ¿Qué es? tendrá como respuestas "un esquema" o "una estrategia".

EJEMPLO 0.2: cuando leas "*La Ley de Coulomb se puede obtener utilizando la Ley de Gauss*", la pregunta te ayudará a tomar consciencia de que se trata de la estrategia de deducir una ley a partir de otra.

EJEMPLO 0.3: el enunciado de un problema puede establecer: "Determinar el campo eléctrico en los puntos del eje que pasa a través de un anillo circular de radio R cargado con una carga Q uniformemente distribuida." Los tres "Qué" te ayudarán no sólo a comprender el enunciado del problema, sino a establecer qué cálculos hay que realizar para resolverlo. La aplicación del método QCP a este problema lo podrás ver en un capítulo posterior.

C) ¿CÓMO?

Esta pregunta te podrá ayudar en varios sentidos: o cómo se representa la idea surgida del ¿Qué? en símbolos matemáticos (traducción al lenguaje matemático de la idea), cómo se calcula algo (proceso de cálculo una vez conocida la traducción al lenguaje matemático) o cuáles son los pasos a seguir para una deducción teórica o el desarrollo de un problema.

EJEMPLO 0. 4 (MUY SENCILLO): Cuando leas "La suma de dos cargas es nula", la pregunta ¿Cómo? indicará en realidad ¿Cómo represento esto? Si tu primera idea es escribir:

$$q_1 + q_2 = 0 \tag{T0. 1}$$

sabiendo que q_1 y q_2 son los símbolos que representan las cargas que se citan, entonces estarás más cerca de comprender lo que estás haciendo. En esta asignatura es conveniente que sepas: representar ideas mediante símbolos (traducción de conceptos al lenguaje matemático), operar correctamente con esos símbolos (manipulación matemática), e interpretar los resultados (conceptualización de las conclusiones).

P) ¿POR QUÉ? O ¿PARA QUÉ?

Esta pregunta te ayudará a justificar los pasos Q y C, o bien a darle utilidad práctica a lo que acabas de realizar en los pasos Q y C.

EJEMPLO 0. 5 (COMPLETO, Y SENCILLO):

La energía cinética de una partícula es igual a la mitad de su masa y multiplicada por su velocidad al cuadrado.

¿QUÉ ES?

Hablamos de "algo" que se refiere a una partícula. Ese algo, que se llama energía cinética, depende de la masa de la partícula y de su velocidad (obviamente, al menos tienes que comprender lo que es la masa y lo que es la velocidad, si no, tienes que aplicar el método QCP a esas palabras).

¿CÓMO (SE REPRESENTA Y CALCULA)?

Los símbolos que usamos pueden ser arbitrarios, le podemos llamar E_K, T o Q a la energía cinética, por ejemplo[I].

$$E_K = ½ mv^2 = \frac{m}{2} v^2 \tag{T0. 2}$$

Se calcula dividiendo la masa m por dos, y multiplicando eso a la velocidad v elevada al cuadrado.

¿PARA QUÉ?

El concepto de energía dice que "es la capacidad de realizar trabajo, medida en Joules". Esta energía, entonces, primero: se llama cinética porque se refiere a la energía que surge del movimiento de la

[I] Podemos utilizar los símbolos que queramos (puedes inventarte los símbolos si quieres), con tal de que los mantengas durante la resolución del problema o durante el desarrollo teórico (sobre todo para evitar confusiones e incongruencias). En general, sin embargo, se acostumbra a utilizar símbolos que, de tanto repetirse en distintos libros, ya pueden ser reconocidos por cualquier especialista en la materia. Esos signos se denominan convencionales.

partícula[II] (si v=0, E_K= ½m.0^2=0, la partícula no tiene energía cinética); segundo, como toda energía es capaz de producir trabajo, el movimiento de la partícula es capaz de producirlo. Por eso: si una esfera de hierro (partícula) tiene una energía cinética distinta de cero, puede producir trabajo; ergo, podría chocar contra un material más blando que el hierro y abrir un agujero en él (produce trabajo sobre una porción del material blando; esta posibilidad depende de los valores de la masa m y la velocidad v de la partícula), o golpear una lata y voltearla.

Este procedimiento que lo hemos aplicado a fórmulas sencillas sirve para ecuaciones más elaboradas. No importa cuán complicada sea una fórmula: para cada uno de los símbolos, y para su conjunto, hay un *Qué*, un *Cómo* y un *Para qué*.

Una aclaración más: naturalmente, es posible aplicar cualquiera de las tres preguntas en cualquier orden, o a veces bastará sólo una de ellas para comprender una idea.

EJEMPLO 0. 6: observa la ecuación (T0. 2). Puedes preguntarte: *¿Qué significa?* (equivalente a "*¿Qué dice esta ecuación?*") Analicemos un poco:

i) La energía cinética depende de m, y esto significa que E_K aumentará si aumentas m. Conclusión: para la misma velocidad, una esfera de 10 gramos tendrá menos energía cinética que una esfera de 100 gramos, por ejemplo.

ii) E_K depende de v^2, y esto quiere decir que cuanto más rápido viaja la partícula, más capacidad tiene de producir trabajo. Por ejemplo: una pequeña esfera de acero puede abollar una lata al golpearla, pero si viaja más rápido podría llegar a perforarla.

iii) Si duplicamos la masa duplicamos la energía cinética: partimos de una masa m_0 (5 kg por ejemplo), y luego pasamos a $2m_0$ (10 kg) entonces:

$$\begin{aligned} &E_{K0} = \tfrac{1}{2} m_0 v^2 \text{ (energía cinética con masa inicial } m_0) \Rightarrow \\ &m_0 \to 2m_0 \text{ (duplicamos la masa inicial)} \Rightarrow \\ &E_K = \tfrac{1}{2}(2m_0)v^2 = 2\left(\tfrac{1}{2} m_0 v^2\right) = 2E_{K0} \to \boxed{E_K = 2E_{K0}} \end{aligned} \qquad \text{(T0. 3)}$$

Traduce a palabras la ecuación dentro del rectángulo: E_K, la energía cinética obtenida al duplicar la masa m_0, es igual a 2 veces la energía cinética obtenida antes de duplicar la masa m_0.

iv) Si duplicamos la velocidad, en cambio, cuadruplicamos la energía cinética: partimos de una partícula con velocidad v_0 (5 m/s, por ejemplo) y luego pasamos a $2v_0$ (10 m/s), entonces:

$$\begin{aligned} &E_{K0} = \tfrac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow \\ &v_0 \to 2v_0 \Rightarrow \\ &E_K = \tfrac{1}{2} m_0 (2v_0)^2 = \tfrac{1}{2} m_0 2^2 v_0^2 = 4\left(\tfrac{1}{2} m_0 v_0^2\right) = 4E_{K0} \to \boxed{E_K = 4E_{K0}} \end{aligned} \qquad \text{(T0. 4)}$$

Traduce a palabras la última ecuación: E_K, la energía cinética obtenida al duplicar la velocidad v_0, es igual a 4 veces la energía cinética obtenida antes de duplicar la velocidad v_0.

Conclusión de lo dicho en iii) y iv): cuando duplicamos la velocidad de una partícula obtenemos un cambio relativo mayor en la energía cinética que cuando duplicamos su masa (para una velocidad y una masa distintas de cero, obviamente).

[II] El nombre de un concepto nuevo no siempre da idea clara de su significado, como sucede en el caso de "Energía Cinética". En casos en que el nombre no sugiera un concepto, es necesario conocer (en el sentido de comprender, de entender) la definición de lo que se está estudiando.

EN RESUMEN:

Qué, Qué Significa, Qué hacer → Conceptos y Estrategias

Cómo → Matemáticas, Procedimientos

Por qué → Justificaciones

Es conveniente insistir: con esta asignatura tienes que trabajar en dos “planos intelectuales”: por un lado, el conceptual, que representa las ideas con las que tienes que manejarte; y, por otro lado, su traducción al lenguaje matemático mediante símbolos, y la correcta manipulación de esos símbolos (reglas algebraicas, reglas de cálculo diferencial, etcétera).

Si comprendes los significados y las estrategias (*qués* y *por qués*) pero no te entrenas en la traducción al lenguaje matemático y en la adecuada manipulación de los símbolos, fallarás a la hora de escribir las ecuaciones y de resolver adecuadamente los problemas.

Si te aprendes de memoria las fórmulas, sólo comprenderás el *cómo*, pero tendrás dificultades a la hora de manejar los significados (los *qués* y los *por qués*) que te permitirán desenvolverte con relativa confianza en el estudio de la teoría y en la resolución de los problemas. De poco sirve saber un listado de fórmulas (manteniéndolas en una especie de chuleta mental) si no se sabe muy bien dónde encajan, y por qué se utilizan unas y no otras en determinadas circunstancias.

0.2. INTRODUCCIÓN: REPASO DE CONCEPTOS BÁSICOS

Partimos desde la base de que ya posees conocimientos relativamente avanzados de matemáticas.

Repasemos algunos de ellos, sin embargo, desde un punto de vista lo más básico e intuitivo posible.

0.2.1. VARIABLES

Q) ¿Qué es una variable?

Es un número real (cualquier número que se te ocurra: enteros, decimales, fraccionarios, irracionales[III]), que puede cambiar durante el desarrollo de un problema.

C) ¿Cómo se representa?

Por una letra del abecedario o del alfabeto griego.

EJEMPLO 0. 7:

T=25 (entero), s=4/5 (fraccionario), u= $2^{½}$=1,414213562… (irracional)

λ=–3,3456 (decimal), o bien p=10x10^{36} (exponencial)

[III] Aunque también podría ser un número complejo. Consideraremos los números complejos en capítulos posteriores.

P) ¿Para qué sirve?

Para establecer valores a cosas que necesitan ser representadas por números (¡incluyendo los números mismos!)[IV].

EJEMPLO 0. 8:

Cantidad de personas que hay en un estadio de fútbol: P=50.000 (o P=80.000; o P=10.000).

Temperatura promedio de una habitación: T=23,5 [ºC] (o T=25,2 [ºC])

Carga eléctrica de una partícula q=0,5 [Culombios] (o q=1,6 [Culombios]).

0.2.2. CONSTANTES

Q) ¿Qué es una constante?

Es un número real (o complejo, ver nota anterior) que no cambia de valor durante el desarrollo de un problema.

C) ¿Cómo se representan?

Por letras del alfabeto. Es común utilizar las primeras letras del abecedario, aunque pueden utilizarse otras letras, incluyendo las del alfabeto griego.

EJEMPLO 0. 9:

a=10 (y mantener ese valor durante el desarrollo del problema o del tema teórico en el que se utiliza)

b=5,12443 (¡constante!)

También existen las llamadas Constantes Universales: valores que no cambian durante el desarrollo de un problema o al pasar de un problema a otro. Corresponden a valores numéricos como pi, o a valores físicos, como la carga del electrón, por citar dos casos[V]:

Carga de un electrón: e=1,60218.10^{-19} [Culombio], Permitividad del vacío: ε_0=8,854x10^{-12} [Faradio/m]

P) ¿Para qué sirven? Las constantes tienen una utilidad similar a la de las variables.

0.2.3. FUNCIÓN DE UNA VARIABLE

Q) ¿Qué es una función de una variable? Si tienes un número x y haces con él una serie de operaciones matemáticas, obtienes otro número y. Puedes decir entonces que y es función de x, o que el número y depende de la variable x.

[IV] Nota que las variables pueden estar acompañadas de Unidades (ºC, Coulomb, etcétera). Luego hablaremos de ellas.

[V] Los valores numéricos de las constantes físicas dependen de las unidades en que éstas se expresen; pero corresponden a distintos modos de representar las mismas cantidades.

C) ¿Cómo se representa? En concreto, se representa por una igualdad: a la izquierda del signo igual por una letra, y a la derecha con las operaciones que hay que realizar sobre la variable. Y se calcula de acuerdo a las operaciones que se indican.

EJEMPLO 0. 10:

$$y = 5x^2 + 3x + 10 \tag{T0. 5}$$

(tradúcelo a palabras: el valor de la función i griega es cinco veces equis al cuadrado más tres veces equis más diez). Esto indica que, conforme le vas dando distintos valores a *x*, obtienes distintos valores de *y*, así:

Le das a *x* el valor…	…calculas…	…y obtienes *y*=
-1,00	$5(-1)^2 + 3(-1) + 10$	12,00
0,00	$5(0)^2 + 3(0) + 10$	10,00
1,20	$5(1{,}2)^2 + 3(1{,}2) + 10$	20,80
2,00	$5(2)^2 + 3(2) + 10$	36,00
3,50	$5(3{,}5)^2 + 3(3{,}5) + 10$	81,75
5,00	$5(5)^2 + 3(5) + 10$	150,00

Tabla 0. 1.

Esta tabla no es ni más ni menos que un modo organizado de decir: si *x* vale –1, entonces *y* vale 12, si *x*=0, entonces *y*=10; cuando *x*=1,2 entonces *y*=20,80; etcétera. Se dice que *y* representa la variable dependiente (porque su valor depende de la variable *x*), mientras que *x* representa la variable independiente (su valor no es función de otra variable, puede tomar los valores que tú le asignes)[VI].

EJEMPLO 0. 11: El volumen de una esfera es igual a cuatro tercios del valor π multiplicado por el radio de la esfera elevado al cubo:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{T0. 6}$$

para ello, *V* es el volumen que deseas calcular (la función) y *r* es el valor que tienes como dato (la variable).

Con la ayuda de esta fórmula también podemos elaborar la siguiente tabla:

Le das a *r* el valor…	…calculas…	…y obtienes *V*=
1,00	$4\pi(1)^3/3$	4,19
2,00	$4\pi(2)^3/3$	33,51
3,00	$4\pi(3)^3/3$	113,10
4,00	$4\pi(4)^3/3$	268,08
5,00	$4\pi(5)^3/3$	523,60
6,00	$4\pi(6)^3/3$	904,78
7,00	$4\pi(7)^3/3$	1436,75

Tabla 0. 2.

En abstracto, una función se representa con una letra, y entre paréntesis otra letra que corresponde a la variable sobre la que hay que hacer las operaciones.

[VI] La variable *x*, a su vez, podría ser función de otra variable, digamos *t*. En ese caso diríamos que *y* es función de otra función *x* (que depende de *t*).

EJEMPLO 0. 12: La expresión más conocida de todas es:

$$y = f(x) \tag{T0. 7}$$

que podría traducirse como: para obtener *y*, han de realizarse una serie de operaciones matemáticas (representadas abstractamente por la letra *f*) sobre *x.* O, abreviando: *y* es función de *x*. Cuando se utiliza esta notación, sin dar operaciones específicas sobre *x* (como se hace en la ecuación (T0. 5), por ejemplo), lo que se desea es trabajar con una función genérica para hacer un desarrollo teórico, por ejemplo.

EJEMPLO 0. 13:

La temperatura media (llamémosla *T*) de una habitación depende del instante (tiempo, llamémosle *t*) en el que se mide. Representamos, por ejemplo, con *g* las operaciones sobre *t* para obtener *T*:

$$T = g(t) \tag{T0. 8}$$

Naturalmente, toda función en abstracto (como la (T0. **8**)) se transforma en una función concreta cuando especificas las operaciones que hay que hacer sobre la variable independiente (*T*=2+*t*, por ejemplo, indicaría que k significa sumarle el número 2 al número *t*).

P) ¿Para qué? Las funciones sirven para representar relaciones entre unas cosas y otras en el mundo físico. Pueden ser relaciones entre cantidades físicas (para lo cual son necesarias unidades: segundos, metros, etcétera), entre cantidades geométricas, o entre cantidades abstractas (básicamente números) en un desarrollo teórico matemático.

EJEMPLO 0. 14:

En abstracto: La altura *h* de una persona depende de su edad *e*: *h*=*f*(*e*).

En concreto: El volumen de una esfera presentado en la ecuación (T0. 6), página 6. En este caso, el volumen *V* se puede representar en metros cúbicos [m^3] si su radio *r* se representa en metros [m].

0.2.4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN DE UNA VARIABLE

Q) ¿Qué es? Es una interpretación geométrica de una función de una variable.

C) ¿Cómo se procede? El procedimiento usual consiste en dibujar un par de ejes Cartesianos, siendo el eje horizontal (abscisas) el que corresponde a la variable independiente, y el eje vertical (ordenadas) el que corresponde a la variable dependiente. Para ello se confecciona una lista como la Tabla 0. 1. Se especifican las unidades en cada eje, y se dibujan algunos puntos en ella. Finalmente se unen los puntos con líneas continuas[VII].

EJEMPLO 0. 15: Supongamos que quieres representar la función:

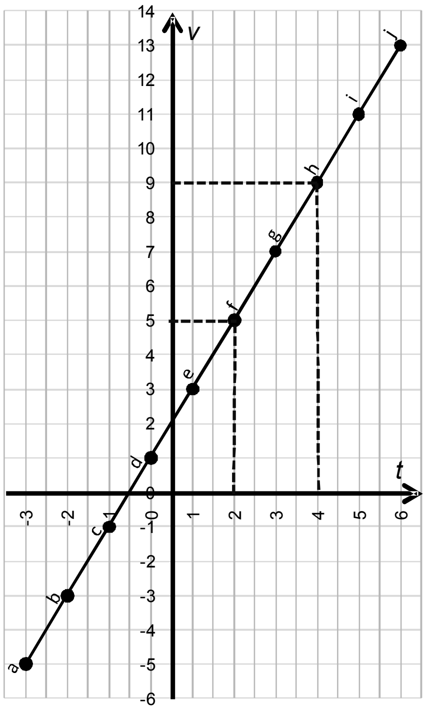
[VII] Algunas veces la cantidad de puntos representados en la tabla son insuficientes para dibujar la curva de la función de modo fiable. Esa incertidumbre de si la curva que dibujas es correcta sólo va disminuyendo con la experiencia, al ir reconociendo funciones de todo tipo y su comportamiento. De todas maneras, debes saber que existen métodos de análisis del comportamiento de las funciones que ayudan a delinear las curvas. También resultan de utilidad algunos programas informáticos preparados para tal fin, como *Mathematica*, *MATLAB* o *Maple*, por ejemplo.

$$v = 5t + 1 \tag{T0. 9}$$

La gráfica será una recta. Confeccionamos la tabla[VIII], a la que llamamos Tabla 0. 3. Dibujamos los ejes Cartesianos, luego, por ejemplo, dibuja una línea vertical en t=2, y otra vertical en v=5, en la intersección de ambas marcas un punto (punto f en la Gráfica). O dibuja una línea vertical en t=4 y otra horizontal en v=9, y marcas otro punto (h). Así procedes con todos, del punto a al j. Luego unes los puntos para obtener la recta, como observas en la Gráfica 0. 1.

Punto	t	v
a	-3.00	-5.00
b	-2.00	-3.00
c	-1.00	-1.00
d	0.00	1.00
e	1.00	3.00
f	2.00	5.00
g	3.00	7.00
h	4.00	9.00
i	5.00	11.00
j	6.00	13.00

Tabla 0. 3.



Gráfica 0. 1.

EJEMPLO 0. 16:

Quieres representar la función:

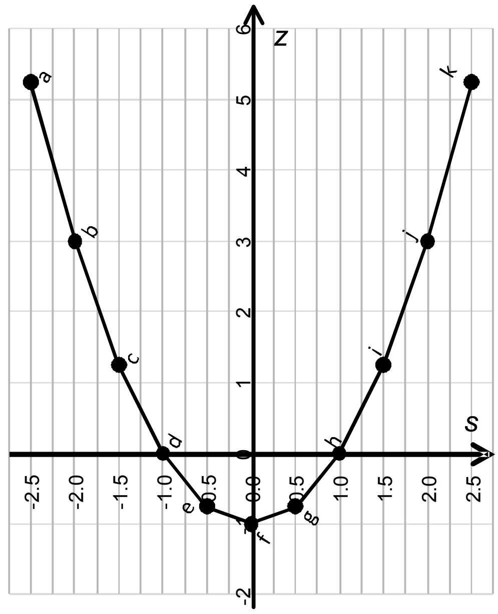
$$z = s^2 - 1 \tag{T0. 10}$$

VIII Para confeccionar la tabla debemos saber primero los valores que puede adquirir la variable independiente, en este caso t (es decir, debes conocer el dominio de la función). No profundizaremos en esto. Puedes consultar algún libro de matemáticas (cálculo) que hayas utilizado para repasar el tema de los dominios y rangos de las funciones.

La gráfica será una parábola. Confecciona la tabla (Tabla 0. 4.) y dibuja los puntos, para luego unirlos por líneas curvas (Gráfica 0. 2.).

Punto	*s*	*z*
a	-2.50	5.25
b	-2.00	3.00
c	-1.50	1.25
d	-1.00	0.00
e	-0.50	-0.75
f	0.00	-1.00
g	0.50	-0.75
h	1.00	0.00
i	1.50	1.25
j	2.00	3.00
k	2.50	5.25

Tabla 0. 4.



Gráfica 0. 2.

P) ¿Para qué? Las representaciones gráficas sirven fundamentalmente para tener una idea visual de cómo se comporta una función. A menudo es más útil mirar una gráfica que leer una tabla con datos, porque uno entiende rápidamente el comportamiento de una función al mirar la gráfica. En otros capítulos analizaremos con cierto detalle algunas gráficas.

0.2.5. FUNCIÓN MULTIVARIABLE (DE VARIAS VARIABLES)

Q) ¿Qué es? Si tienes dos número *x* e *y* y haces con ellos una serie de operaciones matemáticas, combinándolos, obtienes otro número *z*. Puedes decir entonces que *z* es función de *x* y de *y*, o que el número *z* depende de las variables *x* e *y*. Del mismo modo, un número *w* puede ser el resultado del cálculo con tres (*x*,*y*,*z*), cuatro (*x*,*y*,*z*,*u*), o más números. En general, se dice que estas funciones son multivariables (dependen de muchas variables).

C) ¿Cómo se representan matemáticamente? La representación de estas funciones se realiza generalizando lo dicho para las funciones de una variable: indicando las operaciones que tienes que hacer con las variables independientes (todas, en conjunto) para obtener la variable dependiente.

EJEMPLO 0. 17: En concreto: el valor de *z* es la suma de las variables *x* e *y*:

$$z = x + y \tag{T0. 11}$$

esta ecuación te dice específicamente lo que tienes que hacer con *x* e y para obtener *z*.

EJEMPLO 0. 18: La fórmula de la energía cinética E_K de una partícula, presentada en la ecuación (T0. 2), en la página 2, es función de dos variables independientes: la masa *m* y la velocidad *v* de la partícula.

EJEMPLO 0. 19: En abstracto: el valor de z de la ecuación anterior es función de *x* e *y*:

$$z = f(x,y) \tag{T0. 12}$$

es decir que esta ecuación sólo te indica que el valor de *z* depende de los valores de *x* e *y*, pero no te indica explícitamente las operaciones para obtener *z*. Es una función (genérica) de dos variables.

EJEMPLO 0. 20: Uno más elaborado.

$$w = \sum_{n=1}^{6} x_n = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \tag{T0. 13}$$

La ecuación (T0. 13) se traduce así: para obtener *w*, tienes que sumar 6 valores (no necesariamente distintos), a los que llamamos x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 y x_6. Un caso particular sería por ejemplo x_1=2; x_2=3; x_3=3; x_4=21,5; x_5=1; x_6=4; que da un valor de *w*:

$$w = \sum_{n=1}^{6} x_n = 2+3+3+21{,}5+1+4 = 34{,}5 \tag{T0. 14}$$

Observa que hemos llamado x_1, x_2,…,x_6 en lugar de *x,y,z,r,s,t* (por ejemplo), lo que permite ahorrar en notación al indicar la suma $w = \sum_{n=1}^{6} x_n$ (tradúcelo a palabras: *w* igual a la suma de equis sub ene, con el subíndice ene recorriendo desde uno hasta seis; otra forma de decirlo: *w* es la suma de seis números).

En abstracto, *w* es función de seis variables:

$$w = h\left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\right) \tag{T0. 15}$$

P) ¿Para qué sirven las funciones multivariables? Tienen utilidades similares a las de las funciones univariables. Para ejemplo podemos volver de nuevo a la ecuación (T0. 2) de la energía cinética.

0.2.6. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN DE UNA VARIABLE (O DERIVADA ABSOLUTA)

Partimos suponiendo que conoces el concepto básico de derivada. Recuerda: estamos haciendo un repaso de los conceptos necesarios para poder estudiar la asignatura.

Q) ¿Qué es? Básicamente, la derivada es un cociente, una relación entre dos números. Observa.

C) ¿Cómo se representa? Si tenemos una función *y* que depende de una variable *x*, es decir *y*=*f*(*x*) la derivada se representa por cualquiera de estos símbolos:

$$y'\text{, o bien } \frac{dy}{dx}\text{, o bien } \frac{df(x)}{dx}\text{, o bien } f'(x) \tag{T0. 16}$$

el concepto de cociente se observa mejor con los símbolos *dy*/*dx* o *df*(*x*)/*dx*.

¿Cómo se calcula? Aquí tenemos que distinguir dos partes: primera: la definición del proceso de derivación, y segunda: la técnica (el método) para derivar distintas funciones, que, si bien se basa en la definición, se obtiene luego de aprenderse una lista de funciones básicas a las que se aplica la derivada, y al uso de distintas propiedades (derivadas de una suma de funciones, de una multiplicación de funciones, etcétera).

La definición de derivada es, para una función $y=f(x)$:

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad \text{(T0. 17)}$$

Descifremos esta fórmula.

Partimos de un valor de x (un número dado); el valor de y para ese x será, según lo definimos $y=f(x)$ (es decir, una serie de operaciones sobre x para obtener y). Hagamos que x crezca un poco, y que pase de x a $x+\Delta x$ (en este caso, Δx sólo significa que hemos elegido un x ligeramente más grande), entonces $f(x)$ pasará a ser $f(x+\Delta x)$. Por lo tanto, y ha cambiado un valor $\Delta f= f(x+\Delta x)-f(x)$. Ahora comparamos el cambio en y respecto del cambio en x haciendo el cociente: $\Delta f/\Delta x$. Entonces:

- Si f cambia mucho al haber cambiado x, este cociente será muy grande (Δf, el cambio en f, será mucho mayor que Δx, el cambio en x),
- Si $\Delta f=0$ (es decir, si y no ha cambiado al cambiar x) este cociente será igual a cero (es decir[IX] será $\Delta f/\Delta x=0/\Delta x=0$).
- Si f se redujo, Δf será negativo, y el cociente será negativo (ya que, en nuestra definición, consideramos Δx positivo).

Por último, se aplica el concepto de límite, haciendo que Δx se haga muy pequeño ($\lim_{\Delta x\to 0}$), tanto como queramos, aunque no llegamos a cero. Eso es sólo para acercarnos más y más al punto en donde queremos saber el valor de la razón de cambio (derivada).

Repetimos la pregunta: ¿Qué es la derivada? Es el cociente entre el cambio de la función respecto del cambio de su variable independiente.

Existe otro uso de las derivadas cuyo concepto difiere de este cociente de cambios de una función respecto del de la variable de la que depende; sigue siendo un cociente, pero de “porciones”; lo veremos más adelante.

PAUSA: CONCEPTO DE COCIENTE

Para comprender bien el concepto de derivada, tienes que comprender perfectamente la idea de cociente. ¿Estás seguro de que la comprendes? Presta atención a estos ejemplos.

EJEMPLO 0. 21: Supón que una persona mide su altura y obtiene un valor H de 1,80 metros. Luego mide a otra persona y obtiene un valor h de 1,60 metros. Haz el cociente entre ambas y llámalo c:

$$c=\frac{H}{h}=\frac{1{,}80[m]}{1{,}60[m]}=1{,}125 \qquad \text{(T0. 18)}$$

Esto significa, simplemente, que el numerador H es c veces el denominador h (es decir, $H=c.h$), o, en este caso, que 1,80 metros es 1,125 veces 1,60 metros. Con el cociente puedes *comparar* dos cantidades.

EJEMPLO 0. 22: Supón que 12 personas ponen en un bote un total de 144 euros, y que, para ello, cada uno puso la misma cantidad. Con un cociente puedes calcular el dinero entregado por cada persona. Llama CP a la cantidad de personas, DT al dinero total acumulado, y DP al dinero por persona, entonces:

[IX] Esto es posible porque Δx es distinto de cero. Cuando se pasa al límite, como se indica en la ecuación (T0. 17), el valor Δx tiende a cero, pero no llega a ser cero, sólo muy próximo a él (tan próximo como uno quiera hacerlo).

$$DP = \text{Dinero por persona} = \frac{CT}{NP} = \frac{\text{Cantidad total de dinero}}{\text{Número de personas}} = \frac{144\ [\text{euro}]}{12\ [\text{persona}]} = 12\ \frac{[\text{euro}]}{[\text{persona}]} \qquad \text{(T0. 19)}$$

O sea que cada persona aportó 12 €. Si tienes el aporte de euros por cada persona, entonces puedes averiguar cuánto será la suma aportada por cualquier cantidad de personas (suponiendo que el aporte por persona continúe siendo el mismo). Si son 10 personas, serán *CT*=*DP*x*NP*=12x10=120 [€], si son 50 personas, serán *CT*=*DP*x*NP*=12x50=600 [€]. El cociente *DP* te sirve para asignar 12 euros a cada persona, y obtener así la cantidad total de dinero aportado si sabes el número de personas.

En resumen: un cociente también te sirve para *asignar cantidades por unidad* (en el caso anterior, euros por persona, aunque puede ser kilómetros por hora, kilos por cm^3, etcétera).

EJEMPLO 0. 23: El simple análisis de un cociente te puede dar varias pistas. Supón que tienes el cociente de dos números positivos *a* y *b*, cuyo resultado es *c*. Si fijas *b* y aumentas *a* (↑), aumentará *c* (↑). Si fijas *b* y disminuyes *a* (↓), disminuirá *c* (↓). A esto se llama proporción directa (*c* es directamente proporcional a *a*):

$$\frac{a}{b} = c \Rightarrow \frac{a\uparrow}{b\ \text{fijo}} = c\uparrow; \quad \frac{a\downarrow}{b\ \text{fijo}} = c\downarrow \qquad \text{(T0. 20)}$$

Como caso especial, si *b* es distinto de cero y *a* es cero, *c* será igual a cero. Puedes comprobarlo reemplazando *a* y *b* por números.

Si, en cambio, fijas *a* y aumentas *b* (↑), disminuirá *c* (↓). Si fijas *a* y disminuyes *b* (↓), aumentará *c* (↑). A esto se llama proporción inversa (*c* es inversamente proporcional a *b*).

$$\frac{a}{b} = c \Rightarrow \frac{a\ \text{fijo}}{b\uparrow} = c\downarrow; \quad \frac{a\ \text{fijo}}{b\downarrow} = c\uparrow \qquad \text{(T0. 21)}$$

Como caso especial, si *b* se hace muy cercano a cero, y *a* es distinto de cero, *c* se hará muy grande. Por eso se dice que, en un cociente, el denominador tiene que ser distinto de cero, porque si es cero o muy cercano a cero, el resultado puede hacerse infinito.

Estas ideas que te acabo de presentar te ayudarán a interpretar las derivadas.

Antes de terminar, te podrías preguntar: ¿cómo es que, en la ecuación de definición de la derivada (T0. 17), Δx puede hacerse tender a cero, si acabamos de ver que si hago tender a cero un denominador el resultado tiende a infinito? No: un cociente se hace infinito cuando el denominador es muy pequeño comparado con el numerador. En el caso de la derivada, Δx es muy pequeña, pero, en general, Δf también es comparativamente pequeña, con lo que el cociente es un número distinto de infinito[X].

FIN DE LA PAUSA: CONTINUAMOS CON "EL CÓMO" DE LAS DERIVADAS

¿Cómo es la técnica de derivación? ¿Cómo se procede en la práctica?

En los libros elementales de cálculo infinitesimal se presentan listas con distintas funciones y sus correspondientes derivadas. Esas tablas han sido obtenidas aplicando la definición de derivada, ecuación (T0. 17), y su uso permite ahorrar tiempo a quien desee derivar. Por ejemplo:

[X] Algunas veces la función *f* puede cambiar infinitamente al pasar de *x* a $x+\Delta x$, en cuyo caso Δf será muy grande frente a una Δx muy pequeña. En ese caso decimos que existe una "derivada discontinua": la función cambia demasiado abruptamente en ese punto cercano a *x*.

Función de *x*	**Derivada respecto de *x***
Seno x	Cos x
Cos x	–Seno x
Tan x	$1/(\text{Cos } x)^2$
x^n	$n\,x^{n-1}$ (con $n \neq 0$)
ln x	$x^{-1}=1/x$
e^x	e^x
$f(x)+g(x)$	$df(x)/dx+dg(x)/dx$
$a.f(x)$	$a.df(x)/dx$ (a=constante)
$f(x).g(x)$	$g(x).df(x)/dx+f(x).dg(x)/dx$
$f(x)/g(x)$	$[g(x).df(x)/dx-f(x).dg(x)/dx]/[g(x)]^2$
…etcétera[XI].	

Tabla 0. 5

Las técnicas de derivación son, en general, sencillas, y se limitan a aplicar los resultados de las listas similares a la Tabla 0. 5.

P) ¿Para qué se utilizan las derivadas?[XII] Se utilizan siempre que se desee comparar (realizar el cociente entre) los cambios de dos valores, uno función del otro.

EJEMPLO 0. 24: Si en una esfera cambiamos su radio de un valor r a otro un poco más grande $r+dr$, ¿cuánto cambiará su volumen $V(r)$?

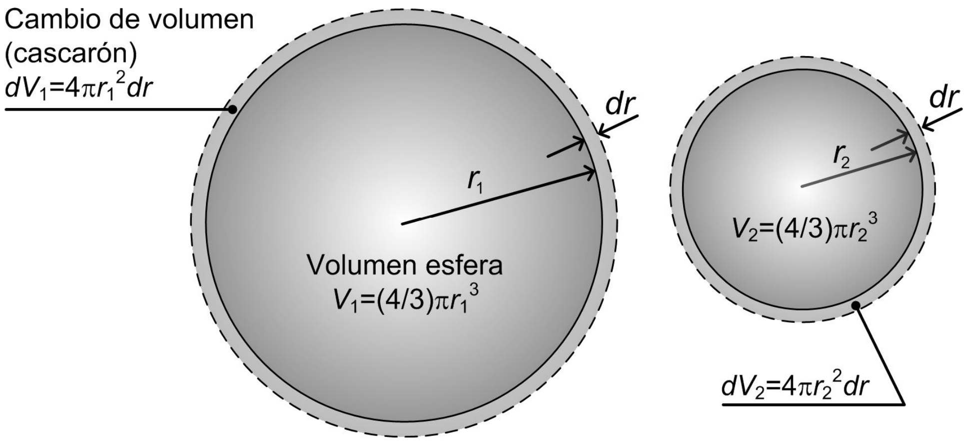


Figura 0. 1. Cambio en el volumen de dos esferas de distinto tamaño. Observa que $dV_1>dV_2$ para el mismo cambio dr en r.

La proporción de cambio será, según hemos visto, la derivada de la ecuación (T0. 6), página 6:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dr}=\frac{d\left[(4/3)\pi r^3\right]}{dr}=(4/3)\pi\frac{d(r^3)}{dr}=\frac{4}{3}\pi 3r^2=4\pi r^2 \Rightarrow \frac{dV}{dr}=4\pi r^2 \qquad \text{(T0. 22)}$$

XI Puedes consultar el libro "*Fórmulas y Tablas de Matemática Aplicada*" de Spiegel, editorial Mc Graw Hill, 1999.

XII Para una explicación elemental de la derivada aplicada a la definición de velocidad en una dimensión, puedes consultar el Tema 2.1 del libro "*Física*, *Vol. I*: *Mecánica*, *radiación y calor*", de Feynman, editorial Addison Wesley, 1987.

La relación de cambios es proporcional al radio al cuadrado. ¿Qué significa esto? Que a mayor radio (r↑), la proporción entre dV y dr es también mayor [($dV/dr=4\pi r^2$)↑], en una relación cuadrática en r. Esto es lógico, ya que para un cambio dr en el radio, el cambio de volumen será menor con una esfera pequeña que con una grande (suponiendo que dr es el mismo en ambos casos). Esto lo puedes ver en la Figura 0. 1.

PREGUNTA: Puesto que $dV/dr=4\pi r^2$, ¿es lícito pasar la dr multiplicando…

$$dV/dr = 4\pi r^2 \Rightarrow dV(r) = 4\pi r^2 dr \text{ ?} \tag{T0. 23}$$

La respuesta es: sí directamente en el caso de las derivadas (al fin y al cabo es un cociente!).

La pregunta anterior permite indicar otra utilidad de la derivada: si tenemos la derivada $f'(x)$, y también tenemos el valor dx, entonces podemos hallar el valor $df(x)$ realizando la misma multiplicación que en (T0. 23):

$$df(x) = f'(x)\,dx \tag{T0. 24}$$

Esto, traducido a palabras sería: si tienes la derivada de una función, la multiplicas por el cambio de la variable independiente y así puedes obtener el cambio de la función.

Los símbolos df y dx se leen: “diferenciales de f y de x”, respectivamente.

Ahora presta atención al siguiente ejemplo.

EJEMPLO 0. 25: Supón que deseamos definir la densidad de masa de una sustancia. Si tienes una masa Δm contenida en un volumen ΔV, entonces la densidad promedio $\bar{\delta}$ (letra griega delta con una barra encima) se define como el cociente entre ambas:

$$\bar{\delta} = \frac{\Delta m}{\Delta V}\left[\frac{kg}{m^3}\right] \tag{T0. 25}$$

Por ejemplo, si tienes 3600 kg de arcilla en un tanque de 3 metros cúbicos de volumen, entonces la densidad promedio de la arcilla será Δm / ΔV = 3600[kg] / 3[m^3] = 1200[kg/m^3], es decir, 1200 kilogramos en cada metro cúbico del interior del tanque. Pero esa es la densidad promedio de todo el tanque (masa en todo el tanque dividido volumen de todo el tanque). Si dividimos la arcilla del tanque en porciones menores de volumen, y aplicamos la definición (T0. 25) a cada una de esas porciones, podríamos encontrarnos con que la densidad promedio de cada una de ellas puede variar (un poco menor en algunas porciones, un poco mayor en otras…). El cálculo de la densidad será más y más preciso en cada punto del tanque conforme hagamos las divisiones de volumen más y más pequeñas. Si tomas un volumen dV muy pequeño (1 mm^3, por ejemplo), dicho volumen contendrá una cantidad de masa dm pequeña (quizás del orden de unos miligramos). Definimos entonces la densidad en cada punto (de la arcilla) de modo similar a la densidad media pero aplicada a un volumen muy pequeño:

$$\delta = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}\left[\frac{kg}{m^3}\right] \tag{T0. 26}$$

un valor que puede coincidir, o no, con el valor promedio que hemos obtenido para todo el tanque.

Observa que la densidad puede variar de un punto a otro dentro del tanque, es decir, la densidad es función de la posición del punto en que ésta se calcula. Más delante daremos más detalles de esto.

La ecuación (T0. 26) representa la definición usual de densidad, que es el cociente entre dos diferenciales, aunque no es exactamente una derivada, en el sentido de que no se obtuvo aplicando la ecuación (T0. 17) de la página 11. Para indicar que la densidad varía de punto a punto, podríamos escribir:

$$\delta(x,y,z)=\frac{dm(x,y,z)}{dV(x,y,z)}\left[\frac{kg}{m^3}\right] \qquad \text{(T0. 27)}$$

que es lo mismo que decir que en el punto (x,y,z) dentro del tanque, la densidad es igual a un diferencial de masa dm en una región pequeña que rodea a dicho punto dV, dividido por esa región.

PREGUNTA: Puesto que δ=dm/dV, ¿es lícito pasar la dV multiplicando así…

$$dm=\delta(x,y,z)\,dV\ \ [kg]\,? \qquad \text{(T0. 28)}$$

En este caso, como no es una derivada, la respuesta es: sí, pero cuidando que dV sea realmente pequeño[XIII]. En esta asignatura siempre podremos pasar las diferenciales multiplicando directamente.

Recuerda la (T0. 26), porque en el Tema 2 la adaptaremos al concepto de densidad de carga eléctrica.

PREGUNTA: ¿Por qué hemos expresado δ, que es el cociente entre dos cantidades pequeñas de masa y volumen, en kg/m^3 y no en g/cm^3, o en mg/mm^3 por ejemplo? La densidad puede expresarse en las unidades que consideres necesarias: g/cm^3, mg/litros, μg/mm^3. Lo único que tendrías que hacer es, para obtener el número correcto, realizar las conversiones de unidades adecuadas a tu problema.

En capítulos posteriores, y cuando lo consideremos oportuno, haremos algunos comentarios respecto del uso de las unidades.

PREGUNTA (Y TAREA): ¿Recuerdas el concepto de Interpretación Geométrica de la Derivada? Seguramente que sí. Repasa en algún libro de cálculo la interpretación geométrica de la derivada y estudia si puedes asociarlo al concepto descrito en la fórmula (T0. 24) de la página 14.

[XIII] Con “cuidando que *dV* sea realmente pequeño” lo que queremos significar, básicamente, es que se cumplan ciertas condiciones expresando *dm* en *Series de Taylor*, un tema que no trataremos aquí, pero que puedes encontrar en cualquier libro de cálculo infinitesimal, como por ejemplo: “*Cálculo, Vol. 1*”, de Larson, editorial Mc Graw Hill, 1999.

0.2.7. DERIVADA PARCIAL (DERIVADA APLICADA A FUNCIONES MULTIVARIABLES)

Si consideramos una función de muchas variables (**PREGUNTA**: ¿qué era una función multivariable?, si no lo recuerdas, repasa el tema 0.2.5 en la página 9), entonces se puede derivar respecto de cada una de ellas.

Q) ¿Qué es una derivada parcial? Es una generalización de la derivada absoluta: es el cociente entre el cambio del valor de la función respecto del cambio de una de sus variables, considerando las otras variables como constantes.

C) ¿Cómo se representa matemáticamente la idea de derivada parcial?

Tienes una función *w* que depende de tres variables *x*, *y*, *z*; es decir *w*=*w*(*x*,*y*,*z*) (observa esta notación: hemos simplificado un poco utilizando la misma letra: *w* a la izquierda y *w* a la derecha, en lugar de *w*=*g*(*x*,*y*,*z*), por ejemplo). La derivada parcial de *w* respecto de *x* se representa y define así:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{w(\overbrace{x+\Delta x}^{\text{Cambio en } x}, y, z) - w(x,y,z)}{\Delta x} \qquad \text{(T0. 29)}$$

es decir: partimos del valor de la función *w* en (*x*,*y*,*z*), y luego desplazamos *x* a *x*+Δ*x*, sin cambiar *y* ni *z*, y comparamos los cambios de *w* y de *x*. Luego hacemos Δ*x* muy pequeña.

Las derivadas parciales respecto de las otras dos variables se definen de modo análogo:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{w(x, y+\Delta y, z) - w(x,y,z)}{\Delta y} \qquad \text{(T0. 30)}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{w(x, y, z+\Delta z) - w(x,y,z)}{\Delta z} \qquad \text{(T0. 31)}$$

Observa: sólo hemos considerado el cambio en *y* en (T0. 30), y el cambio en *z* en (T0. 31).

¿Cómo se calcula una derivada parcial? Como si fuese una derivada absoluta respecto de una de sus variables, manipulando las otras como si fuesen provisionalmente constantes.

EJEMPLO 0. 26: Si tienes $w=2.x^2.y+4.z^3-3.z.ln(y)$, derivas con respecto a *x*, considerando *y* y *z* constantes:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial\left(2x^2y+4z^3-3z\ln y\right)}{\partial x} = \frac{\partial(\overbrace{2y}^{\text{const.}}x^2)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\overbrace{4z^3}^{\text{const.}}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\overbrace{3z\ln y}^{\text{const.}}\right)}{\partial x} =$$
$$= 2y\frac{\partial\left(x^2\right)}{\partial x} + 0 - 0 = 2y(2x) = 4xy \Rightarrow \boxed{\frac{\partial w}{\partial x} = 4xy} \qquad \text{(T0. 32)}$$

Derivas parcialmente respecto de *y*, esta vez "aislando" *x* y *z*:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial\left(2x^2y+4z^3-3z\ln y\right)}{\partial y} = \frac{\partial(\overbrace{2x^2}^{\text{const.}}y)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\overbrace{4z^3}^{\text{const.}}\right)}{\partial y} - \frac{\partial(\overbrace{3z}^{\text{const.}}\ln y)}{\partial y} =$$
$$= 2x^2\frac{\partial(y)}{\partial y} + 0 - 3z\frac{\partial(\ln y)}{\partial y} = 2x^2 - 3z\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial w}{\partial y} = 2x^2 - \frac{3z}{y}} \qquad \text{(T0. 33)}$$

Por último, la derivada parcial de *w* respecto de *z* es:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial\left(2x^2y+4z^3-3z\ln y\right)}{\partial z}=\frac{\partial(2x^2y)}{\partial z}+\frac{\partial(4z^3)}{\partial z}-\frac{\partial(3z\ln y)}{\partial z}=\\&=0+4\frac{\partial\left(z^3\right)}{\partial z}-3\ln y\frac{\partial(z)}{\partial z}=2(3z^2)-3\ln y\Rightarrow\boxed{\frac{\partial w}{\partial z}=6z^2-3\ln y}\end{aligned} \quad \text{(T0. 34)}$$

P) ¿Para qué sirven las derivadas parciales? Se utilizan en casos en que se desea conocer la relación de cambio entre el valor de una función y una de sus variables.

EJEMPLO 0. 27: Considera la definición de energía cinética de una partícula representada por la ecuación (T0. 2) de la página 2. E_K es función de dos variables (masa de la partícula *m* y su velocidad *v*). Veamos cuál es la razón de cambio de E_K respecto de la masa:

$$E_K=E_K(m,v)\Rightarrow\frac{\partial E_K(m,v)}{\partial m}=\frac{\partial(\frac{1}{2}mv^2)}{\partial m}=\frac{v^2}{2}\frac{\partial(m)}{\partial m}=\frac{v^2}{2} \quad \text{(T0. 35)}$$

PREGUNTA: ¿qué significa esto?

La razón de cambio de E_K respecto de la velocidad es:

$$\frac{\partial E_K(m,v)}{\partial v}=\frac{\partial(\frac{1}{2}mv^2)}{\partial v}=\frac{m}{2}\frac{\partial(v^2)}{\partial m}=\frac{m}{2}(2v)=mv \quad \text{(T0. 36)}$$

PREGUNTA: ¿y qué significa eso?

Si ahora te preguntases, ¿cómo puedo averiguar el cambio total de E_K cuando ambas variables (masa y velocidad) cambian? Tendrías que conocer la definición de la diferencial total de una función multivariable.

0.2.8. DIFERENCIAL TOTAL DE UNA FUNCIÓN MULTIVARIABLE

Q) La diferencial total es el cambio total de una función considerando los cambios producidos en todas y cada una de sus variables.

C) ¿Cómo se calcula?

Si tienes una función *w*=*w*(*x*,*y*,*z*), la diferencial total *dw* se define como la suma de las multiplicaciones entre las derivadas parciales respecto de sus variables y sus cambios asociados:

$$w=w(x,y,z)\Rightarrow dw=\overbrace{\frac{\partial w}{\partial x}dx}^{\text{Cambio debido a } x}+\overbrace{\frac{\partial w}{\partial y}dy}^{\text{Cambio debido a } y}+\overbrace{\frac{\partial w}{\partial z}dz}^{\text{Cambio debido a } z} \quad \text{(T0. 37)}$$

P) La diferencial total permite hallar el cambio completo de la función cuando se modifican ligeramente los valores de todas las variables de las que depende.

EJEMPLO 0. 28: Contestando a la pregunta final planteada en el Ejemplo 0. 27, obtenemos

$$dE_K = \frac{\partial E_K}{\partial m}dm + \frac{\partial E_K}{\partial v}dv = \frac{v^2}{2}dm + mv\,dv \qquad \text{(T0. 38)}$$

Este cambio específico se expresa en Julios.

La definición puede extenderse a funciones de muchas variables. Por ejemplo, si y depende de N variables x_1, x_2, …., x_N, la diferencial total de w es:

$$y = y(x_1, x_2, ..., x_N) \Rightarrow dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial y}{\partial x_N}dx_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n \qquad \text{(T0. 39)}$$

PREGUNTA: ¿Cómo se lee esta fórmula?

En esta asignatura sólo trabajaremos con funciones de hasta 3 variables independientes.

0.2.9. INTEGRAL INDEFINIDA (FUNCIÓN UNIVARIABLE)

Q) ¿Qué es? La integral indefinida es la operación inversa de la derivada. Por eso también se la denomina antiderivada.

EJEMPLO 0. 29: Si tienes una función $g(x)$=cos(x), piensa que g es una función que ya está derivada; entonces, pregúntate: ¿Cuál es la función $f(x)$ que tengo que derivar para obtener $g(x)$? En este caso ya conoces la respuesta: $f(x)$=sen(x), porque $df(x)/dx$=cos(x)=$g(x)$. En realidad, es cualquier función sen(x)+constante, puesto que al derivar una constante obtienes cero, es decir:

$$f(x)=\text{sen}(x)+C \Rightarrow df/dx = d[\text{sen}(x)]/dx + dC/dx = \cos(x)+0=\cos(x). \qquad \text{(T0. 40)}$$

C) ¿Cómo se representa y cómo se calcula?

La integral indefinida se representa con una S alargada (∫) a la izquierda de la función a integrar y un diferencial a la derecha, que indica respecto de qué variable hay que integrar:

Integrando (función a integrar)

Variable de integración

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \left(\text{de tal manera que } \frac{d[F(x)+C]}{dx} = f(x)\right) \qquad \text{(T0. 41)}$$

Función primitiva (solución)

Constante

y se lee "Integral de la función *f* de *x* respecto de *x*". A la derecha se ha escrito la función *F*(*x*) a la que se denomina primitiva.

¿Cómo se calcula?

Si se conoce una función cuya derivada es el integrando, la solución es sencilla: simplemente es esa función más una constante.

EJEMPLO 0. 30: Aquí tienes algunos ejemplos de integración directa:

La Integral…	…tiene como solución…	…porque…
$\int \text{sen}(x)dx =$	$-\cos(x)+C$	$\frac{d[-\cos(x)+C]}{dx} = \text{sen}(x)$
$\int \cos(x)dx =$	$\text{sen}(x)+C$	$\frac{d[\text{sen}(x)+C]}{dx} = \cos(x)$
$\int x^n dx =$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ con $n \neq -1$	$\frac{d\left[x^{n+1}/(n+1)+C\right]}{dx} = \frac{(n+1)x^n}{(n+1)} = x^n$
$\int \sec^2(x)\,dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx =$	$\tan(x)+C$	$\frac{d[\tan(x)+C]}{dx} = \sec^2(x)$
	…etcétera[XIV].	

Para integrales más complicadas, existen varias técnicas de integración (por partes, por sustitución, etcétera) que no presentaremos en este repaso por considerar que debes conocer las más importantes[XV].

P) ¿Para qué se necesita integrar? Para resolver ecuaciones en las que están involucradas derivadas y diferenciales (aplicaremos algunas técnicas de integración a lo largo de estos apuntes). También resultan útiles para resolver integrales definidas, un tema que presentaremos a continuación.

0.2.10. INTEGRAL DEFINIDA (FUNCIÓN UNIVARIABLE)

Q) ¿Qué es? La integral definida es, básicamente, una suma de multiplicaciones de sucesivos valores de una función por pequeños cambios en su variable independiente [lee **C)** para entender mejor esta frase].

C) ¿Cómo se representa? Supón que tienes una función *f* que depende de *x*. La integral definida es el siguiente proceso de suma infinita:

$$\text{Integral definida} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{n=0}^{N} f\left(x_0 + n\Delta x\right)\Delta x \qquad \text{(T0. 42)}$$

Antes de continuar tienes que comprender que éste es un cálculo simbólico, un concepto de suma infinita, imposible de realizarse en la práctica[XVI].

[XIV] Puedes consultar el libro "*Fórmulas y Tablas de Matemática Aplicada*" de Spiegel, editorial Mc Graw Hill, 1999.

[XV] El objetivo de este repaso es, a través del método QCP, hacer énfasis en los conceptos y las metodologías asociados a las herramientas que ya has estudiado antes de ingresar a la Universidad, y no volver a dar paso a paso exactamente todo el análisis matemático. Si no recuerdas algunas técnicas puedes utilizar como referencia los libros "*Cálculo Vol. 1*" y "*Cálculo Vol. 2*" de Larson, Editorial Mc Graw Hill, 1999.

Traduzcamos esta ecuación: partimos del punto $x=x_0=a$, y allí calculamos el valor de f, es decir $f(x_0)$. Este resultado lo multiplicamos por Δx. A continuación, avanzamos en x una distancia Δx, es decir, pasamos a $x_0+\Delta x$, y, luego de calcular $f(x_0+\Delta x)$, lo multiplicamos por Δx, y sumamos a la multiplicación anterior, así continuamos con $x_0+2\Delta x$, $x_0+3\Delta x$, hasta alcanzar $x_0+N\Delta x=x_N=b$. Esta suma, entonces, recorre la función con la variable yendo x desde a hasta b (avanzando en pequeñas porciones Δx). El proceso puede refinarse haciendo Δx más pequeña, aumentando a su vez el número de divisiones N. En el límite, esta suma está compuesta por infinitos términos ($N\to\infty$), pero como los límites a y b son fijos, entonces Δx tiene que hacerse muy pequeña, de modo que se cumpla $b-a=N.\Delta x$. Con esa condición de límite se dice que se obtiene la integral definida de $f(x)$ entre a y b, y eso se representa por:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ N\to\infty}} \sum_{n=0}^{N} f\left(x_0+n\Delta x\right)\Delta x = \int_{x_0}^{x_N} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{(T0. 43)}$$

Una vez que hemos presentado el concepto, el cómo de la definición, presentamos la técnica para resolver estas integrales en la práctica.

¿Cómo se calcula?

El cálculo de la integral definida consiste en tres pasos: i) Obtener la primitiva (la antiderivada) $F(x)$ del integrando $f(x)$; ii) Calcular la $F(x)$ en los extremos, es decir, obtener $F(a)$ y $F(b)$; iii) Finalmente, realizar la diferencia $F(b)-F(a)$: ése es el resultado de la integración, como lo indica la ecuación (T0. 44).

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)\ ;\quad \text{teniendo en cuenta que } \frac{dF(x)}{dx} = f(x). \qquad \text{(T0. 44)}$$

ACLARACIÓN: el resultado final de una integral definida puede ser una función o puede ser un número, eso depende, fundamentalmente, de los valores que se asignen a los extremos a y b.

EJEMPLO 0. 31: Calcula la integral definida entre $x=a$ y $x=b$ de $f(x)=\cos(x)$. Seguimos la secuencia descrita anteriormente:

$$\int_a^b \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x)\Big|_a^b = \underbrace{\operatorname{sen}(b)-\operatorname{sen}(a)} \qquad \text{(T0. 45)}$$

Paso i): Obtener la primitiva de $\cos(x)$:

Pasos ii) y iii): Calcular el valor de la primitiva en los extremos y restar ambos

[XVI] Cuando se realizan cálculos por ordenador de estas integrales definidas, se realizan sumas finitas. El cálculo numérico de integrales es un tema que está fuera del alcance de este repaso, y que tampoco utilizaremos en esta asignatura.

Observa que el resultado de esta integral depende de los valores numéricos que se asignen a los extremos *a* y *b*.

EJEMPLO 0. 32: Calcula la integral definida entre x=0,5 y x=7 de la función $5x^2+3x-6$.

Primero distribuyes la integral respecto de la suma:

$$\int_{0,5}^{7}\left(5x^2+3x-6\right)dx=\int_{0,5}^{7}5x^2\,dx+\int_{0,5}^{7}3x\,dx-\int_{0,5}^{7}6\,dx \qquad \text{(T0. 46)}$$

luego quitas las constantes fuera de las integrales:

$$\int_{0,5}^{7}5x^2\,dx+\int_{0,5}^{7}3x\,dx-\int_{0,5}^{7}6\,dx=5\int_{0,5}^{7}x^2dx+3\int_{0,5}^{7}x\,dx-6\int_{0,5}^{7}dx \qquad \text{(T0. 47)}$$

a continuación hallas las primitivas de cada una de ellas, escribiendo los valores de los extremos arriba y abajo a la derecha de una barra vertical que acompañe a las primitivas:

$$5\int_{0,5}^{7}x^2dx+3\int_{0,5}^{7}x\,dx-6\int_{0,5}^{7}dx=5\left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_{0,5}^{7}\right)+3\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0,5}^{7}\right)-6\left(\left.x\right|_{0,5}^{7}\right) \qquad \text{(T0. 48)}$$

entonces calculas los valores de las primitivas en los extremos y expresas las restas (los valores de los extremos superiores se reemplazan en las primitivas a la izquierda de las restas). Finalmente, simplificas y realizas el cálculo:

$$\begin{aligned}&5\left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_{0,5}^{7}\right)+3\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0,5}^{7}\right)-6\left(\left.x\right|_{0,5}^{7}\right)=5\left(\frac{7^3}{3}-\frac{0,5^3}{3}\right)+3\left(\frac{7^2}{2}-\frac{0,5^2}{2}\right)-6\left(7-0,5\right)=\\&=5\left(\frac{343-0,125}{3}\right)+3\left(\frac{49-0,25}{2}\right)-6(6,5)=\boxed{605,583}\end{aligned} \qquad \text{(T0. 49)}$$

En este caso, el resultado de la integral es directamente un número.

P) ¿Para qué se utilizan? Las integrales definidas tienen infinidad de aplicaciones. En general, puede decirse que se utilizan siempre que se desee obtener la contribución total (suma) de una función entre dos extremos de su variable independiente.

EJEMPLO 0. 33: Supongamos que tenemos un conjunto de tablones, todos ellos de la misma anchura y grosor y distintas longitudes, y queremos hallar la longitud promedio de esos tablones. Supón que tienes N de ellos (N=30 tablones, por ejemplo, si quieres especificar un valor), cada uno con la misma anchura Δa (por ejemplo 0,1 metros), y los dispones en vertical, uno a continuación del otro, como lo indica la Figura 0. 2. Cada uno poseerá una altura (longitud) dada en metros: H_1 metros, H_2 metros, etcétera, hasta H_N.

Para hallar el promedio de las alturas $\overline{H}$, sumas cada una de ellas y divides esa suma por el número de tablones:

$$\overline{H}=\frac{\sum_{n=1}^{N}H_n}{N}\quad\text{[metros]} \qquad \text{(T0. 50)}$$

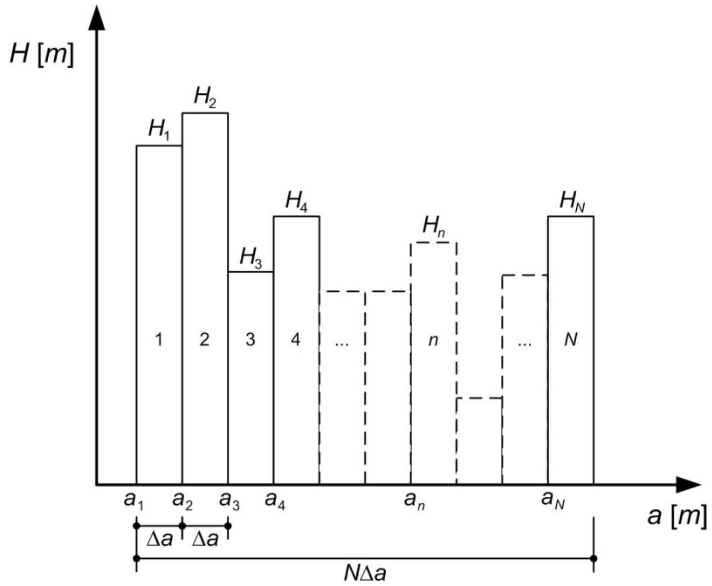


Figura 0. 2. Conjunto de tablones dispuestos en vertical para calcular su altura promedio.

Ahora haz un truco: multiplica y divide la ecuación anterior por Δa (esto no cambiará el resultado):

$$\overline{H} = \frac{\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta a}{N\Delta a} = \frac{A}{L} \quad \text{[metros]} \tag{T0. 51}$$

Aplicando ese "truco" observamos que el cálculo de la altura promedio es equivalente a obtener el área total de los tablones A (suma de las áreas de cada tablón $H_n.\Delta a$) y dividirlo por la longitud total $L=N\Delta a$ de las anchuras. Bien, qué pasa si los tablones se hacen más y más estrechos ($\Delta a \to 0$), y su número aumenta indefinidamente ($N\to\infty$) manteniendo L constante? Que la altura se transforma en una función continua de a, $H=H(a)$, y…

$$\overline{H} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta a\to 0}} \frac{\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta a}{N\Delta a} = \frac{1}{L}\int_{a_1}^{a_N} H(a)da = \frac{1}{a_N - a_1}\int_{a_1}^{a_N} H(a)da \quad \text{[metros]} \tag{T0. 52}$$

es decir que la altura promedio se transforma en la integral definida de $H(a)$ entre los extremos a_1 y a_N, dividida por la longitud[XVII] $L=a_N-a_1$.

La ecuación representa la definición de valor promedio de una función. Por ejemplo, si tenemos una función f que varía con el tiempo t, y queremos hallar el promedio temporal entre los instantes t_a y t_b, simplemente especificamos:

$$\text{Promedio temporal de } f(t) = \overline{f} = \frac{1}{t_b - t_a}\int_{t_a}^{t_b} f(t)dt \tag{T0. 53}$$

Con el Ejemplo 0. 33 se observa que el área bajo la curva $H(a)$ entre los extremos a_1 y a_N es la integral definida de H entre esos puntos, una interpretación geométrica que se da en todos los libros de cálculo infinitesimal básico (ver la nota XV al pie de la página 19). Las ecuaciones (T0.50) y (T0.51) indican que, para hallar el valor promedio de una función, hay que hallar el área bajo la curva entre los extremos de la variable independiente, y dividir esa área por el recorrido total de la variable entre dichos extremos.

XVII Si observas la Figura 0. 2 verás que en realidad $L=(a_N+\Delta a)-a_1$, pero como $\Delta a\to 0$, entonces la expresión $L=a_N-a_1$ es correcta en la ecuación (T0.50).

0.3. ANEXO AL TEMA 0.

Finalizaremos el repaso presentando el concepto de integral múltiple.

0.3.1. INTEGRAL MÚLTIPLE (FUNCIONES MULTIVARIABLES)

Q) ¿Qué es? La integral múltiple es la generalización de la integral definida, considerando funciones de varias variables.

C) ¿Cómo se representa?[XVIII] Simbólicamente se representa como una secuencia de signos de integración, cada uno con sus respectivos extremos y correspondientes a sus respectivas variables. Así, para una función de dos variables *f*(*r*,*s*) le corresponderá una representación de integral doble:

$$\int_a^b\int_c^d f(r,s)\,ds\,dr = \int_a^b\left(\int_c^d f(r,s)\,ds\right)dr = \int_c^d\left(\int_a^b f(r,s)\,dr\right)ds \qquad \text{(T0. 54)}$$

que se podría leer en detalle: integral de la función *f* que depende de *r* y de *s*, calculada con *r* de *a* a *b*, y *s* de *c* a *d* (observa las flechas que indican la asociación de los límites con sus variables).

Como esta fórmula es nueva, damos un paso atrás y preguntamos:

Q) ¿Qué significa esta fórmula? En la integral definida de una variable, comenzábamos en un punto *x*=*a* y "barríamos" en pequeños intervalos Δx hasta *x*=*b*, hallando los valores de *f*(*x*) en cada uno de los puntos barridos, es decir, en $f(x_0+n\Delta x)=f(a+n\Delta x)$ y sumándolos luego de multiplicarlos por Δx. En la ecuación (T0. 54) hacemos lo mismo, pero aplicando un "doble barrido" sobre *r* y sobre *s*, que son ahora las variables independientes. De esta manera, barremos desde *r*=*a* hasta *r*=*b*, y desde *s*=*c* hasta *s*=*d*. En la notación, sólo tienes que prestar atención a los extremos. Los extremos de la integral interior (integral que está "más cerca" de la función) se corresponden con la variable interior (variable cuya delta está "más cerca" de la función), según indicamos en la ecuación (T0. 54) con sendas flechas.

Volvemos al cómo.

C) Si observas la ecuación (T0. 54), los paréntesis a la derecha indican que las integrales definidas dobles se resuelven como secuencias de integrales definidas simples (univariables). Esto lo podemos ver mejor con un…

EJEMPLO 0. 34: Calcula la integral definida de f(*r*,*s*)=5.r^2+*r*.cos(s), con *r* desde *a* hasta *b* y *s* desde *c* hasta *d*:

$$\int_a^b\int_c^d f(r,s)\,ds\,dr = \int_a^b\int_c^d\left[5r^2 + r\cos(s)\right]ds\,dr = \int_a^b\overbrace{\left\{\int_c^d\left[5r^2 + r\cos(s)\right]ds\right\}}^{\text{Resolvemos esto primero}}dr \qquad \text{(T0. 55)}$$

[XVIII] La definición de integral múltiple correspondería a límites de sumas sucesivas (un sumatorio por cada variable) similares a la de la integral definida univariable. Por sencillez evitaremos esa definición y pasaremos directamente a su generalización simbólica y al método de cálculo.

Consideramos lo encerrado entre corchetes para resolver la función como si sólo dependiese de *s*, así que (del mismo modo que se hizo con las derivadas parciales) la otra variable, *r*, se considera constante:

$$\begin{aligned}&\int_c^d \left[5r^2 + r\cos(s)\right] ds = \int_c^d \overbrace{5r^2}^{\text{Constante}} ds + \int_c^d \overbrace{r}^{\text{Constante}} \cos(s) ds = 5r^2 \int_c^d ds + r\int_c^d \cos(s) ds = \\ &= 5r^2 \left(s\Big|_c^d\right) + r\left(\text{sen}(s)\Big|_c^d\right) = 5r^2(d-c) + r\left[\text{sen}(d) - \text{sen}(c)\right]\end{aligned} \quad \text{(T0. 56)}$$

Este resultado lo reemplazamos en lo encerrado entre corchetes en la ecuación (T0. 55), y lo resolvemos como otra integral simple:

$$\begin{aligned}&\int_a^b \left\{5r^2(d-c) + r\left[\text{sen}(d)-\text{sen}(c)\right]\right\} dr = \int_a^b 5r^2(d-c) dr + \int_a^b r\left[\text{sen}(d)-\text{sen}(c)\right] dr = \\ &5(d-c)\int_a^b r^2\, dr + \left[\text{sen}(d)-\text{sen}(c)\right]\int_a^b r\, dr = 5(d-c)\left(\frac{r^3}{3}\Bigg|_a^b\right) + \left[\text{sen}(d)-\text{sen}(c)\right]\left(\frac{r^2}{2}\Bigg|_a^b\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{\int_a^b\int_c^d \left[5r^2 + r\cos(s)\right] ds\, dr = 5(d-c)\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) + \left[\text{sen}(d)-\text{sen}(c)\right]\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)}\end{aligned} \quad \text{(T0. 57)}$$

Que es la solución buscada.

Es importante recalcar que el orden de resolución de las integrales (primero respecto de *ds* y después respecto de *dr*) no importa en este caso.

Del mismo modo, una función de tres variables *w*(*p*,*q*,*r*), le corresponderá una representación de integral triple:

$$\int_a^b\int_c^d\int_e^f w(p,q,r)\, dp\, dq\, dr = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_e^f w(p,q,r)\, dp\right) dq\right] dr \quad \text{(T0. 58)}$$

que se puede leer: integral de la función *w*(*p*,*q*,*r*), calculada con *p* desde *e* hasta *f*, con *q* desde *c* hasta *d* y con *r* desde *a* hasta *b*.

La integral triple se resuelve de la misma manera que la integral doble: calculando consecutivamente las integrales simples de las variables *p*, *q* y *r* (en cualquier orden).

P) ¿Para qué sirven las integrales dobles y triples? Las integrales dobles generalmente tienen utilidad con problemas que requieren calcular áreas planas o bien obtener resultados de sumas infinitesimales [del tipo $\Sigma f(x,y).\Delta x.\Delta y$] utilizando funciones que dependen de dos coordenadas. Algunas veces, sin embargo, estas integrales dobles se pueden reducir a integrales simples con la adecuada selección de las coordenadas (coordenadas polares en lugar de cartesianas planas, por ejemplo).

Las integrales triples tienen utilidad en casos que requieren cálculos de volúmenes, o bien obtener sumas infinitesimales [del tipo $\Sigma f(x,y,z).\Delta x.\Delta y.\Delta z$] utilizando funciones que dependen de tres variables. Del mismo modo que con las integrales dobles, las integrales triples a veces se pueden reducir a integrales dobles con la adecuada selección de coordenadas (coordenadas cilíndricas o esféricas, en lugar de cartesianas, por ejemplo). De hecho, en ciertos casos una integral triple se puede reducir a una integral simple. Estos casos los veremos en algunos problemas de la asignatura.