Ejercicios del Tema 2. Conjuntos, aplicaciones y relaciones.

1.- Describe los siguientes conjuntos dando una lista de sus elementos:

a) El conjunto de los enteros no negativos tales que su doble es menor que 11.

b) B = {x tales que $x \in \mathbf{Z}$ y $x^2 < 12$}.

c) C = {cadenas de longitud menor o igual que 2 formadas con el alfabeto A = {0, 1}}.

d) El conjunto de soluciones reales x de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

2.- Consideremos el alfabeto A = {0, 1} y los conjuntos C = {cadenas de longitud menor o igual que tres formadas con el alfabeto A} y B = {01, 110, 011, 0}. Indica si es verdadera o falsa cada una de las afirmaciones siguientes:

a) B = C ***b)*** $0 \in B$ ***c)*** $\{01\} \subseteq B$ ***d)*** $1 \in B$ ***e)*** $\varnothing \subseteq B$ ***f)*** $\varnothing \in B$.

3.- **i)** Completa cada apartado escribiendo $\in$ o $\subseteq$ en lugar de O:

a) {2} O {1,2,3} ***b)*** 2 O {1,2,3} ***c)*** {2} O {1,2,{1},{2}}

d) {2} O {{1},{2},{3}} ***e)*** $\varnothing$ O {1,2,3}

ii) Si X = {$\varnothing$, {$\varnothing$}, {$\varnothing$, {$\varnothing$}}, a, {a}, 0}, halla el cardinal de **P**(**P**(X)).

4.- ***a)*** Encuentra un contraejemplo de la afirmación siguiente:

Si $A \cap C = B \cap C$, entonces $A = B$.

b) Demuestra que si $(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$ y $(A \cap C') \subseteq (B \cap C')$, entonces $A \subseteq B$.

5.- Responde justificando la respuesta

a) ¿$P \cap Q = P \Leftrightarrow P \subseteq Q$?

b) ¿$P \cup Q = P \Leftrightarrow Q \subseteq P$?

c) ¿$P \cap Q = P \cup Q \Leftrightarrow P = Q$?

d) ¿$P \oplus Q = P \Rightarrow Q = \varnothing$?

6.- Sean A ={$\varnothing$} y B = P(P(A)). Estudia si los siguientes enunciados son verdaderos

a) $\varnothing \in B$ ***b)*** $A \in B$ ***c)*** $A \subseteq B$ ***d)*** $\{A\} \in B$ ***e)*** $\{A\} \subseteq B$.

¿Cuáles son verdaderos si A = {0}?

7.- Dados los conjuntos X = {α,0,{α,0}}, Y = {α,0,{α},{0}} y Z = {α,0}, calcula los conjuntos $X \cap P(Z)$, $Y \cap P(Z)$ y $P(X) \cap P(Y)$.

8.- Sean A y B dos subconjuntos de un conjunto X. Simplifica la siguiente expresión:

$$(A' \cap B') \cap \big[[(A \cup B) \cap (A \cup B')] \cup [(A \cap B) \cup (A' \cap B)]\big]$$

9.- Cuando está a punto de salir de un restaurante, un hombre comprueba que tiene una moneda de 1 céntimo de euro, una de 5, una de 10, una de 20 y una de 50. ¿De cuántas formas puede dejar (al menos una de) sus monedas para la propina en los casos siguientes:

a) si no hay restricciones,
b) si quiere quedarse con algo de cambio,
c) si quiere dejar al menos 10 céntimos de euro?

10.- Determina si la aplicación f: $A \to A$ es inyectiva y/o sobreyectiva en los casos $A = \mathbf{Z}$ y $A = \mathbf{R}$. Si no es sobreyectiva, calcula la imagen de f.

a) $f(x) = x + 7$ ***b)*** $f(x)= 2x - 3$ ***c)*** $f(x) = -x^2 + x$ ***d)*** $f(x) = x^3$

11.- Sean f: $A \to B$ y g: $B \to C$ aplicaciones.

a) Si $g \circ f$ es inyectiva, ¿se puede asegurar que f y g son inyectivas?

b) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, ¿se puede asegurar que f y g son sobreyectivas?

c) Si $g \circ f$ es biyectiva, ¿se puede asegurar que f y g son biyectivas?

12.- Sea f: $\{a,b,c\} \to \{a,b,c\}$ la aplicación definida por $f = \{(a,b), (b,a), (c,b)\}$, escribe $f \circ f$ y $f \circ f \circ f$ como conjunto de pares ordenados. Calcula f^9 y f^{623}.

13.- Sean f: $A \to B$, g: $A \to B$ y h: $B \to C$ aplicaciones tales que $h \circ f = h \circ g$. Demuestra que si h es inyectiva, entonces $f = g$.

14.- Sea f: $X \to Y$ una aplicación. Prueba que f es sobreyectiva si, y sólo si, $|f^{-1}(\{y\})| \geq 1$ para todo $y \in Y$.

15.- Sean f: $A \to B$, g: $B \to C$ y h: $C \to A$ aplicaciones tales que $h \circ g \circ f$ es inyectiva, $g \circ f \circ h$ es sobreyectiva y $f \circ h \circ g$ es sobreyectiva. Demuestra que f, g y h son aplicaciones biyectivas.

16.- Sea $A=\{1, 2, 3, 4\}$ y R la relación definida para $a, b \in A$ por: a R b si, y sólo si, $a < b + 2$.

a) Escribe los pares que forman la relación R y estudia sus propiedades.
b) Calcula la relación recíproca $R^{-1} = \{(a, b)$ tales que $(b, a) \in R\}$.
c) Calcula su relación complementaria $R' = \{(a, b)$ tales que $(a, b) \notin R\}$.
d) Resuelve los anteriores apartados para la relación, $a\, S\, b \Leftrightarrow$ b es un múltiplo de a.

17.- Prueba que la siguiente relación R definida en $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es de equivalencia. Calcula las clases de equivalencia.

$R = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 4), (3, 2), (5, 5)\}$.

18.- En el conjunto de los números enteros **Z** se define la relación $xRy \Leftrightarrow x^3 + y^2$ es par. Demuestra que es una relación de equivalencia y halla el conjunto cociente.

19.- Considera la relación R definida en el conjunto A = $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, de la siguiente manera: (x, y) R (z, t) si, y sólo si, x + t = y + z. Prueba que es una relación de equivalencia y calcula la clase de equivalencia de (0,0).

20.- Estudia las siguientes relaciones binarias definidas en el conjunto **Z**:

a) $xRy \Leftrightarrow xy > 0$ b) $xRy \Leftrightarrow xy \geq 0$

21.- Sean A el conjunto de los enteros positivos divisores de 48 y R la siguiente relación en A:

a R b $\Leftrightarrow$ b es un múltiplo de a.

a) Representa el diagrama de Hasse de R en A.

b) Halla los elementos destacados de B en los siguientes casos:

i) B = {2, 4, 6, 12} ii) B = {3, 6, 8, 16}.

22.- Sea A = {001, 111, 010, 011, 000, 100}. Representa el diagrama de Hasse correspondiente a la relación de orden R en los siguientes casos:

a) R es el orden lexicográfico de las cadenas de bits basado en el orden 0 < 1. Es decir, *abc* R *def* $\Leftrightarrow$ $a < d$ ó $a = d$ y $b < e$ ó $a = d$ y $b = e$ y $c < f$ ó $a = d$ y $b = e$ y $c = f$.

b) R es el orden dado por, *abc* R *def* si y sólo si $a \leq d$ y $b \leq e$ y $c \leq f$.

23.- Sean X un conjunto no vacío, ($\mathbf{N}$, $\leq$) el conjunto de los números naturales con el orden usual y f: X $\rightarrow$ **N** una aplicación. Se define en X la relación: x R y $\Leftrightarrow$ f(x) $\leq$ f(y). Demuestra que:

a) la relación R es reflexiva y transitiva, pero no es necesariamente antisimétrica.

b) R es una relación de orden si la aplicación f es inyectiva.

24.- La figura representa el diagrama de Hasse para un conjunto parcialmente ordenado A. Para B = {4, 5, 6, 7, 8} $\subseteq$ A, razona si es verdadera o falsa cada una de las afirmaciones siguientes:

a) 7 es maximal de B y 12 es cota superior de B en A.

b) 5 es maximal de B y 1 mínimo de A.

c) 5 es minimal de B y 10 maximal de A.

d) 1 es cota inferior de B en A y 1 es mínimo de A.