*Matemática Discreta, curso 2006-07*

## Ejercicios del Tema 3. Teoría elemental de números

**1.-** Demuestra, por inducción, que para todo número natural $n$ se cumple:

***a)*** $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

***b)*** $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = n\,(n+1)\,(2n+1)/6$.

***c)*** $\sum_{i=1}^{n} i(i!) = (n+1)! - 1$  ***d)*** $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{(n+1)}$  ***e)*** $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$

**2.-** Demuestra que para cada entero $n \geq 0$, el número $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ es múltiplo de 13.

**3.-** Demuestra que para cada entero $n \geq 0$, el número $n^3 + 5n$ es múltiplo de 6.

**4.-** Dadas las igualdades:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2+3+4 &= 1+8 \\ 5+6+7+8+9 &= 8+27 \\ 10+11+12+13+14+15+16 &= 27+64 \end{aligned}$$

encuentra la fórmula general sugerida por ellas y demuéstrala.

**5.-** Se define la sucesión de números $\{a_n\}$ por $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Demuestra que $a_n < (7/4)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

**6.-** Prueba que $4n < n^2 - 7$ para todo entero $n > 5$.

**7.-** Demuestra que todo número natural $n \geq 24$ se puede expresar como suma de cincos y sietes.

**8.-** Calcula $n$ natural de tal manera que $\sum_{i=1}^{2n} i = \sum_{i=1}^{n} i^2$ .

**9.-** Demuestra que:

***a)*** Todo número entero al cuadrado se puede escribir de la forma $4k$ o $4k + 1$.

***b)*** Todo número entero al cubo se puede escribir de la forma $9k$, $9k + 1$ o $9k + 8$.

**10.-** Jorge tiene dos recipientes no marcados. La capacidad de un recipiente es de 17 litros y la del otro 55 litros. ¿Cómo puede usar Jorge los dos recipientes para medir exactamente un litro?

**11.-** Utiliza el Algoritmo de Euclides para calcular el m.c.d.(1492,1776) y exprésalo de la forma $\alpha\, 1492 + \beta\, 1776$.

**12.-** ***a)*** Demuestra que si $a$ y $b$ son números enteros tales que m.c.d.$(a,b) = 1$, entonces

$$\text{m.c.d.}(a+b,\ a^2+b^2) = 1 \text{ ó } 2.$$

***b)*** Sean $a$, $b$ enteros con $b > 0$. Prueba que $b^2$ es un divisor de $a$ si, y sólo si, existen enteros $x$, $y$ tales que m.c.d.$(x,y) = b$ y $xy = a$.

***c)*** Prueba que si $a$ es un entero par y $b$ es un entero impar, entonces m.c.d.$(a,b)$ = m.c.d.$(a/2,b)$.

**13.-** Sean $a$, $b$ y $c$ números enteros tales que m.c.d.$(a,b) = 1$ y $c$ divide a $a+b$. Demuestra que m.c.d.$(a,c)$= m.c.d.$(b,c) = 1$.

**14.-** Prueba que para todo número primo $p$ (con $p \neq 2$ y $p \neq 5$), $p^2 - 1$ ó $p^2 + 1$ es divisible por 10.

**15.-** Prueba que todo número primo impar se puede expresar de forma única como diferencia de dos cuadrados de números naturales.

**16.-** Calcula las soluciones enteras de las ecuaciones diofánticas.
***a)*** $28x + 36y = 44$. ***b)*** $66x + 550y = 88$.

**17.-** Repartimos 470 caramelos en un aula de 31 alumnos de modo que cada niña recibe 7 caramelos más que cada niño. Un cierto grupo de alumnos de la clase recibe 74 caramelos ¿Cuántos niños y niñas forman ese grupo?

**18.-** Halla las soluciones en N de la ecuación $x^2 - y^2 = 252$.

**19.-** Estudia si son compuestos los números 23711 y $2^{11} - 1$.

**20.-** Demuestra que si $a \equiv b$ mód($m$) entonces $a^2 \equiv b^2$ mód($m$). Pon un ejemplo en el que $a^2 \equiv b^2$ mód($m$) y, sin embargo, **no** se verifique que $a \equiv b$ mód($m$) ni $a \equiv -b$ mód($m$).

**21.-** Resuelve las congruencias siguientes: ***a)*** $4x \equiv 1$ mód(23), ***b)*** $2x \equiv 5$ mód(10).

**22.-** ¿Existe algún múltiplo de 28 cuyas dos últimas cifras sean 16? En caso afirmativo, describe cómo son <u>todos</u> los múltiplos positivos de 28 que cumplen esa condición.

**23.-** Resuelve el sistema de congruencias siguiente, siendo $x$ e $y$ números enteros

$$25x + 6y \equiv 3 \text{ mód } (7)$$
$$9x + 15y \equiv 5 \text{ mód } (7)$$

**24.-** Un oficial coloca a sus reclutas en filas de cinco y le sobran dos. Después los coloca en filas de seis y le sobran 4. Cuando los coloca en filas de siete le sobran 5 y, si finalmente los coloca en filas de 11 no le sobra ninguno. Sabe que tiene menos de 1200 soldados y sospecha que han cometido algún error al colocarse en filas. ¿Tiene razón el oficial? ¿Por qué?

**25.-** Resuelve el sistema de congruencias $x \equiv 2$ mód(3), $3x \equiv 4$ mód(5), $5x \equiv 6$ mód(7).

**26.-** Halla el valor de n, $0 \leq n < 17$, para que $1211^{339}.n \equiv_{17} 22$

**27.-** Halla las cuatro últimas cifras binarias de $1993^{1994}$.

**28.-** Calcula el resto de dividir $1579^{1907} + 50.52 + 49!$ entre 51.

**29.-** Un natural $n$ se dice perfecto si es igual a la suma de todos sus divisores $d$ con $1 \leq d < n$. Demuestra que, si $2^a - 1$ es primo para un entero positivo $a$, entonces $n = 2^{a-1}(2^a - 1)$ es perfecto.

**30.-** Sea $n$ un número natural tal que m.c.d.($n$,10) = 1. Demuestra que existe un múltiplo de $n$ de la forma $10^\alpha - 1 = 99\ldots9$.

**31.-** Resuelve las ecuaciones: ***a)*** $331_{(x} = 106_{(11}$ ***b)*** $274_{(8} = x_{(2}$.

**32.-** Calcula: ***a)*** 13 + 23 + 33; ***b)*** $43 \times 21$, donde los números están escritos en base 5.

**33.-** Halla los criterios de divisibilidad por 14 y por 9. Aplícalos para hallar el valor de $x$ tal que el número $68x062$ sea divisible por 126.

**34.-** Demuestra que, si $a$ y $b$ son dos enteros con las mismas cifras decimales pero en distinto orden, el número $a - b$ es múltiplo de 9.

**35.-** ***a)*** Obtén una generalización del criterio de divisibilidad por un natural $k$ de un número $n$ escrito en base $b$.
***b)*** Aplica el apartado anterior en el caso de que $k = 8$ y $b = 9$. ¿Es $53286_{(9}$ divisible por 8?