

Ejercicios del Tema 5. Grafos

1. Demuestra o responde razonadamente a las cuestiones siguientes:
 - a) El grafo completo de p -vértices es $p-1$ regular.
 - b) ¿Cuántas aristas tiene el grafo bipartito $K_{m,n}$?
 - c) Todos los grafos 3-regulares tienen un número par de vértices.
 - d) ¿Cuántas aristas tiene el grafo K_n ?
 - e) ¿Cada vértice de un árbol es un punto de corte?
 - f) ¿Es posible dar un ejemplo de árbol que sea un grafo completo?
 - g) En un árbol toda arista es de separación.
 - h) ¿Es posible construir un grafo 4-regular con 15 aristas?
 - i) Sea G un grafo del cual sabemos que sus 9 vértices tienen grados 5 o 6. Si no podemos encontrar 5 vértices de grado 6, entonces habrá, al menos, 6 vértices de grado 5.
 - j) Si $G = (V, E)$ es un grafo simple 3-regular tal que $|E| = 2|V| - 6$, entonces G tiene 12 vértices.
 - k) Demuestra que en un grafo simple $G = (V, E)$ se verifica $|E| \leq |V|(|V| - 1)/2$
2. Estudia si los pares de grafos de las figuras 1, 2 y 3 son isomorfos entre sí.
3. Halla un camino euleriano en el grafo de la figura 4.
4. Determina si los grafos de las figuras 5, 6, 7 y 8 son eulerianos. Construye el camino euleriano en los casos que exista.
5. Halla un árbol expandido de peso mínimo para los grafos de las figura 9 y 10.
6. Prueba que todos los subgrafos $(n-2)$ -regulares de K_n son isomorfos a K_{n-1} para n impar. Encuentra un subgrafo 2-regular de K_4 no isomorfo a K_3 .
7. Sean $G_1 = (V, E)$ y $G_2 = (W, F)$ grafos sin vértices comunes y consideremos los vértices v_1, v_2 de V y w_1, w_2 de W . Sea G el grafo obtenido a partir de G_1 y G_2 añadiendo las aristas $\{v_1, w_1\}$ y $\{v_2, w_2\}$. Si G es un árbol, ¿ G_1 y G_2 son árboles? Razona la respuesta.
8. Demuestra que si $T = (V, E)$ es un árbol con $|V| \geq 2$, entonces T posee, al menos, dos hojas (vértices de grado 1).

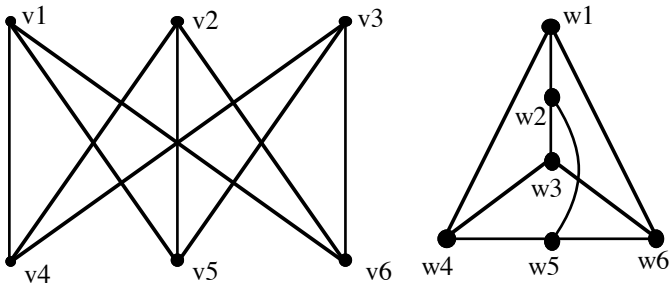


Figura 1

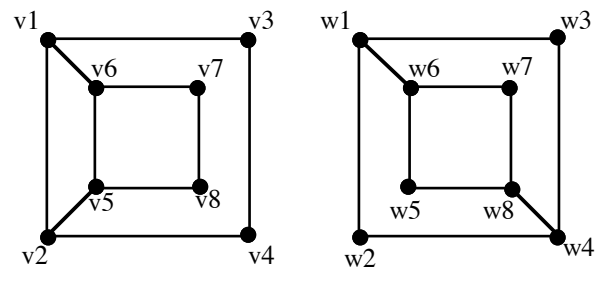


Figura 2

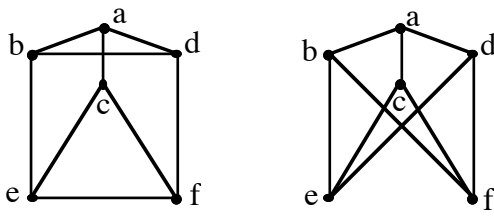


Figura 3

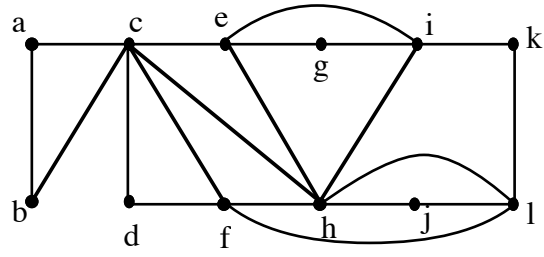


Figura 4

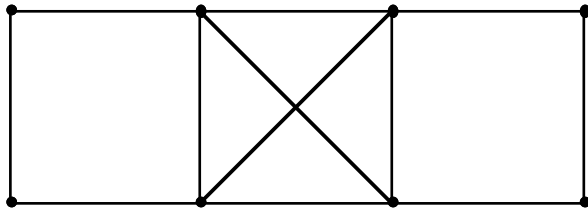


Figura 5

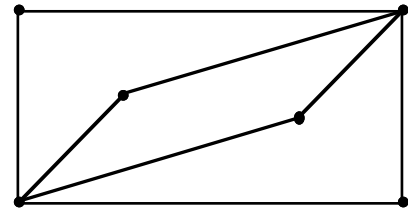


Figura 6

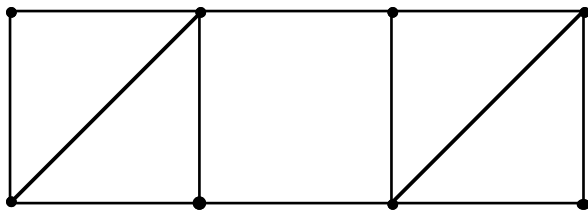


Figura 7

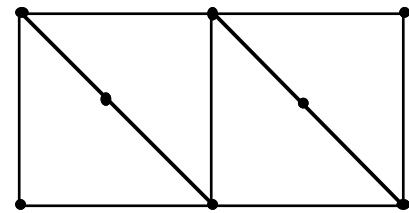


Figura 8

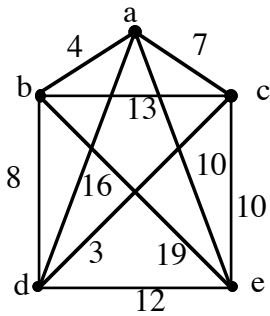


Figura 9

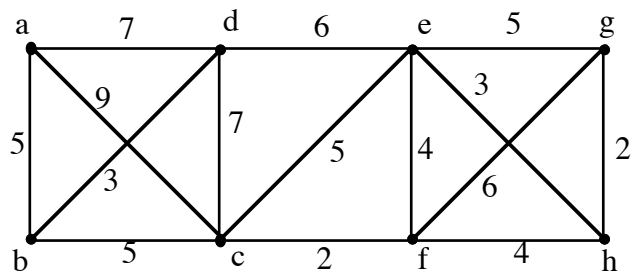


Figura 10