

Ejercicios del Tema 2. Conjuntos, aplicaciones y relaciones

1. Describe los siguientes conjuntos dando una lista de sus elementos:

- i) El conjunto de los enteros no negativos tales que su doble es menor que 11.
- ii) $B = \{x \text{ tales que } x \in \mathbb{Z} \text{ y } x^2 < 12\}$.
- iii) $C = \{\text{cadenas de longitud menor o igual que 2 formadas con el alfabeto } A = \{0, 1\}\}$.
- iv) El conjunto de soluciones reales x de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

2. Consideremos el alfabeto $A = \{0, 1\}$ y los conjuntos

$$C = \{\text{cadenas de longitud menor o igual que tres formadas con el alfabeto } A\}$$

y $B = \{01, 110, 011, 0\}$. Indica si es verdadera o falsa cada una de las afirmaciones siguientes:

$$\text{a) } B = C \quad \text{b) } 0 \in B \quad \text{c) } \{01\} \subseteq B \quad \text{d) } 1 \in B \quad \text{e) } \emptyset \subseteq B \quad \text{f) } \emptyset \in B$$

3. a) Completa cada apartado escribiendo \in ó \subseteq en lugar de \mathbf{O} :

- $\{2\} \mathbf{O} \{1, 2, 3\}$
- $2 \mathbf{O} \{1, 2, 3\}$
- $\{2\} \mathbf{O} \{1, 2, \{1\}, \{2\}\}$
- $\{2\} \mathbf{O} \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$
- $\emptyset \mathbf{O} \{1, 2, 3\}$
- $\mathbb{N} \mathbf{O} \mathbb{Z}$
- $\{2\} \mathbf{O} \mathbb{Z}$
- $\{2\} \mathbf{O} \mathbf{P}(\mathbb{Z})$

b) Si $X = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, a, \{a\}, 0\}$, halla el cardinal de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.

4. i) Encuentra un contraejemplo de la afirmación siguiente:

$$\text{Si } A \cap C = B \cap C, \text{ entonces } A = B.$$

ii) Demuestra que si $(A \cap C) = (B \cap C)$ y $(A \cap C') = (B \cap C')$, entonces $A = B$.

5. Sean X, Y y Z tres conjuntos disjuntos dos a dos. Demuestra que si los conjuntos A y B cumplen que $A \subseteq X \cup Y$ y $B \subseteq X \cup Z$, entonces $A \cap B \subseteq X$.

6. Sean $A = \{\emptyset\}$ y $B = \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. Verifica que los siguientes enunciados son verdaderos:

$$\text{i) } \emptyset \in B \quad \text{ii) } A \in B \quad \text{iii) } A \subseteq B \quad \text{iv) } \{A\} \in B \quad \text{v) } \{A\} \subseteq B$$

¿Cuáles son verdaderos si $A = \{0\}$?

7. Dados los conjuntos $X = \{\alpha, 0, \{\alpha, 0\}\}$, $Y = \{\alpha, 0, \{\alpha\}, \{0\}\}$ y $Z = \{\alpha, 0\}$, calcula los conjuntos $X \cap \mathcal{P}(Z)$, $Y \cap \mathcal{P}(Z)$ y $\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$.

8. Sean A y B dos subconjuntos de un conjunto X . Simplifica la siguiente expresión:

$$(A' \cap B') \cap [((A \cup B) \cap (A \cup B')) \cup ((A \cap B) \cup (A' \cap B))].$$

9. Sean A y B dos subconjuntos de U . Demuestra que $A \oplus B' = \emptyset$ si, y sólo si, $\{A, B\}$ es una partición de U .

10. Cuando está a punto de salir de un restaurante, un hombre nota que tiene una moneda de 1 céntimo de euro, una de 5, una de 10, una de 20 y una de 50. ¿De cuántas formas puede dejar (al menos una de) sus monedas para la propina en los casos siguientes:

- i) si no hay restricciones,
- ii) si quiere quedarse con algo de cambio,
- iii) si quiere dejar al menos 10 céntimos de euro?

11. Determina si la aplicación $f : A \rightarrow A$ es inyectiva y/o sobreyectiva en los siguientes casos $A = \mathbb{Z}$ y $A = \mathbb{R}$. Si no es sobreyectiva, calcula la imagen de f :

I) $f(x) = x + 7$ II) $f(x) = 2x - 3$ III) $f(x) = -x^2 + x$ IV) $f(x) = x^3$

12. Sean el conjunto $A = \{a, b, c\}$ y la aplicación $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ definida por $f(X) = (A \setminus X) \setminus \{a\}$ para todo $X \in \mathcal{P}(A)$.

- I) Calcula $f(\emptyset)$ y $f(A)$.
- II) Estudia si es inyectiva y/o sobreyectiva.
- III) Calcula los conjuntos $f^{-1}(\{c\})$, $f^{-1}(\{a, b\})$ y $\cup\{f^{-1}(S) \mid S \in \mathcal{P}(A)\}$.

13. Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ aplicaciones:

- I) Si $g \circ f$ es inyectiva, ¿se puede asegurar que f y g son inyectivas?
- II) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, ¿se puede asegurar que f y g son sobreyectivas?
- III) Si $g \circ f$ es biyectiva, ¿se puede asegurar que f y g son biyectivas?

14. Sea $f : \{a, b, c\} \rightarrow \{a, b, c\}$ la aplicación definida por $f = \{(a, b), (b, a), (c, b)\}$, escribe $f \circ f$ y $f \circ f \circ f$ como conjunto de pares ordenados. Calcula f^9 y f^{623} .

15. Sean $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ y $h : B \rightarrow C$ aplicaciones tales que $h \circ g = h \circ f$. Demuestra que si h es inyectiva, entonces $f = g$.

16. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación. Prueba que f es sobreyectiva si, y sólo si, $|f^{-1}(\{y\})| \geq 1$ para todo $y \in Y$.

17. Sean $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ y $h : C \rightarrow A$ aplicaciones tales que $h \circ g \circ f$ es inyectiva, $g \circ f \circ h$ es sobreyectiva y $f \circ h \circ g$ es sobreyectiva. Demuestra que f , g y h son aplicaciones biyectivas.

18. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y \mathbf{R} la relación definida para $a, b \in A$ por: $a\mathbf{R}b$ si, y sólo si, $a < b + 2$.

- I) Escribe los pares que forman la relación \mathbf{R} y estudia sus propiedades.
- II) Calcula la relación recíproca $\mathbf{R}^{-1} = \{(a, b) \text{ tales que } (b, a) \in \mathbf{R}\}$.
- III) Calcula su relación complementaria $\mathbf{R}' = \{(a, b) \text{ tales que } (a, b) \notin \mathbf{R}\}$.
- IV) Resuelve los anteriores apartados para la relación $a\mathbf{S}b \Leftrightarrow b$ es un múltiplo de a .

19. Prueba que la siguiente relación \mathbf{R} definida en $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es de equivalencia y calcula las clases de equivalencia

$$\mathbf{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 4), (3, 2), (5, 5)\}.$$

20. Considera la relación \mathbf{R} definida en el conjunto $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, de la siguiente manera: $(x, y)\mathbf{R}(z, t)$ si, y sólo si, $x + t = y + z$. Prueba que es una relación de equivalencia y calcula la clase de equivalencia de $(0, 0)$.

21. Estudia las siguientes relaciones binarias definidas en el conjunto \mathbb{Z} :

I) $x\mathbf{R}y \Leftrightarrow xy > 0$. II) $x\mathbf{R}y \Leftrightarrow xy \geq 0$.

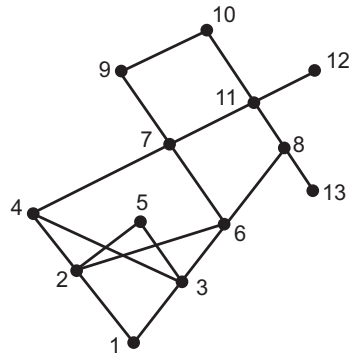
22. Sea $A = \{001, 111, 010, 011, 000, 100\}$. Representa el diagrama de Hasse correspondiente a la relación de orden \mathbf{R} en los siguientes casos:

I) \mathbf{R} es el orden lexicográfico de las cadenas de bits basado en el orden $0 < 1$. Es decir,

$$abc\mathbf{R}def \Leftrightarrow a < b \text{ ó } (a = d \text{ y } b < e) \text{ ó } (a = d \text{ y } b = e \text{ y } c < f) \text{ ó } (a = d \text{ y } b = e \text{ y } c = f).$$

II) \mathbf{R} es el orden dado por: $[abc\mathbf{R}def \Leftrightarrow a \leq d \text{ y } b \leq e \text{ y } c \leq f]$.

23. Sea X un conjunto no vacío, (\mathbb{N}, \leq) el conjunto de los números naturales con el orden usual y $f : X \rightarrow \mathbb{N}$ una aplicación. Se define en X la relación $x\mathbf{R}y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$. Demuestra que :
- la relación \mathbf{R} no es necesariamente una relación de orden.
 - \mathbf{R} es una relación de orden si la aplicación f es inyectiva.
24. La figura representa el diagrama de Hasse para un conjunto parcialmente ordenado A .



Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, para $B = \{4, 5, 6, 7, 8\} \subseteq A$,

- 7 es maximal de B y 12 es cota superior de B en A .
 - 5 es maximal de B y 1 un mínimo de A .
 - 5 es minimal de B y 10 maximal de A .
 - 1 es cota inferior de B en A y 1 es un mínimo de A .
25. Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 30, 60\}$ con la relación “ser divisor”. Halla los elementos maximales y los minimales de $B = \{3, 4, 5, 6, 30\}$ y las cotas inferiores de B en A .