Ejercicios del Tema 3. Teoría elemental de números

1. Demuestra, por inducción, que para todo número natural n se cumple:

   I) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

   II) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$.

   III) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$.

   IV) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$.

2. Demuestra que para cada entero $n \geq 0$, el número $2^{4n+1} + 3^{2n+5}$ es múltiplo de 7.
3. Demuestra que para cada entero $n \geq 0$, el número $n^3 + 5n$ es múltiplo de 6.
4. Demuestra que la sucesión definida recursivamente por $a_2 = 20$ y $a_n = 5 \cdot 4^{n-1} - a_{n-1}$, para $n \geq 3$, verifica que $a_n = 4 \cdot (-1)^n + 4^n$ para todo natural $n \geq 2$.
5. Prueba que $4n < n^2 - 7$ para todo entero $n > 5$.
6. Demuestra que todo número natural $n \geq 24$ se puede expresar como suma de cincos y sietes.
7. Demuestra que:

   I) Todo número entero al cuadrado se puede escribir de la forma $4k$ o $4k + 1$.

   II) Todo número entero al cubo se puede escribir de la forma $9k$, $9k + 1$ o $9k + 8$.

8. Jorge tiene dos recipientes no marcados. La capacidad de un recipiente es de 17 litros y la del otro de 55 litros. ¿Cómo puede usar Jorge los dos recipientes para medir exactamente un litro?
9. Utiliza el Algoritmo de Euclides para calcular el $\mathrm{mcd}(1492, 1776)$ y exprésalo de la forma $\alpha \cdot 1492 + \beta \cdot 1776$.
10. Sean a, b y c números enteros tales que $a \mid b + c$.

    I) Demuestra que si $a \mid b$, entonces también debe cumplirse que $a \mid c$.

    II) Demuestra mediante un contraejemplo que $a \mid b \cdot c$ puede ser falso.

    III) Demuestra mediante un contraejemplo que $a \mid \mathrm{mcd}(b, c)$ puede ser falso.

11. Sean a, b y c números enteros tales que $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$ y c divide a $a+b$. Demuestra que $\mathrm{mcd}(a, c) = \mathrm{mcd}(b, c) = 1$.
12. Prueba que para todo número entero p impar y no múltiplo de 5 se cumple que $p^2 - 1$ ó $p^2 + 1$ es divisible por 10.
13. Prueba que todo número primo impar se puede expresar de forma única como diferencia de dos cuadrados de números naturales.
14. Calcula las soluciones enteras de las ecuaciones diofánticas:

    I) $28x + 36y = 44$.

    II) $66x + 550y = 88$.

15. Repartimos 470 caramelos en un aula de 31 alumnos de modo que cada niña recibe 7 caramelos más que cada niño. Un cierto grupo de alumnos de la clase recibe 74 caramelos. ¿Cuántos niños y niñas forman ese grupo?

16. Halla las soluciones en $\mathbb{N}$ de la ecuación $x^2 - y^2 = 252$.
17. Estudia si son compuestos los números 23711 y $2^{11} - 1$.
18. Demuestra que si $a \equiv_m b$, entonces $a^2 \equiv_m b^2$. Pon un ejemplo en el que $a^2 \equiv_m b^2$ y, sin embargo, no se verifique que $a \equiv_m b$.
19. Resuelve las congruencias siguientes:

    I) $4x \equiv_{23} 1$

    II) $2x \equiv_{10} 5$

20. ¿Existe algún múltiplo de 28 cuyas dos últimas cifras sean 16? En caso afirmativo, describe cómo son todos los múltiplos positivos de 28 que cumplen esa condición.
21. Resuelve el sistema de congruencias siguiente, siendo x e y números enteros,

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &\equiv_m 4 \\ 4x + 3y &\equiv_m 4 \end{aligned}\right\}$$

    para $m = 6$, $m = 10$ y $m = 5$.

22. Un grupo de menos de 300 turistas, viaja en 5 autocares iguales completos y llega a un hotel. Las mesas del comedor del hotel son de 9 personas y de 4 personas. Los turistas de los 2 primeros autocares se sientan alrededor de las mesas de 9 personas resultando 3 personas sin acomodar; éstas, junto con los turistas de los 3 autocares restantes, se sientan alrededor de las mesas de 4 personas, quedando todos acomodados para la cena y ninguna mesa incompleta. Al día siguiente, van a realizar una visita a un Museo donde deben entrar en grupos de 24 personas. Si al hacer la distribución en grupos de 24 personas, el último grupo es de tan sólo 15 personas, ¿cuántos turistas viajan en cada autobús?
23. Resuelve el sistema de congruencias

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv_3 2 \\ 3x &\equiv_5 4 \\ 5x &\equiv_7 6 \end{aligned}\right\}$$

24. Halla el valor de n, $0 \leq n < 17$, para que $1211^{339} \cdot n \equiv_{17} 22$.
25. Halla las cuatro últimas cifras binarias de 1993^{1994}.
26. Calcula el resto de dividir $1579^{1907} + 50 \cdot 52 + 49!$ entre 51.
27. Un natural n se dice perfecto si es igual a la suma de todos sus divisores d con $1 \leq d < n$. Demuestra que, si dado un entero positivo a, el número $2^a - 1$ es primo, entonces $n = 2^{a-1}\,(2^a - 1)$ es perfecto.
28. Sea n un número natural tal que el $\operatorname{mcd}(n, 10) = 1$. Demuestra que existe un múltipo de n de la forma $10^\alpha - 1 = 9 \dots 9$.
29. Resuelve las ecuaciones

    I) $331_{(x} = 106_{(11}$

    II) $274_{(8} = x_{(2}$

30. Calcula, teniendo en cuenta que los números están en base 5,

    a) $13 + 23 + 33$

    b) $43 \cdot 21$

31. Halla los criterios de divisibilidad por 14 y por 9. Aplícalos para hallar el valor de x tal que el número $68x062$ sea divisible por 126.
32. Demuestra que si a y b son dos enteros con las mismas cifras decimales pero en distinto orden, entonces el número $a - b$ es múltiplo de 9.
33. I) Obtén una generalización del criterio de divisibilidad por un natural k de un número n escrito en base b.

    II) Aplica el apartado anterior en el caso de que $k = 8$ y $b = 9$. ¿Es $53286_{(9}$ divisible por 8?