

Ejercicios del Tema 4. Combinatoria

1. Un número telefónico consta de siete cifras enteras. Supongamos que la primera cifra debe ser un número entre 2 y 9, ambos inclusive. La segunda y la tercera cifra deben ser números entre 1 y 9, ambos inclusive. Cada una de las restantes cifras es un número entre 0 y 9, ambos inclusive. ¿Cuántos números de teléfono distintos pueden formarse con estas condiciones?
2. El consejo directivo de una empresa informática tiene 10 miembros. Se ha programado una próxima reunión de accionistas para aprobar una nueva lista de ejecutivos (elegidos entre los 10 miembros del consejo). ¿Cuántas listas diferentes, formadas por un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero, pueden presentar el consejo a los accionistas para su aprobación?
Si tres miembros del consejo son ingenieros en Informática, ¿cuántas listas tienen:
 - a) un ingeniero propuesto para la presidencia?
 - b) exactamente un ingeniero en la lista?
 - c) al menos un ingeniero en la lista?
3. Un pianista ha ensayado durante 112 horas a lo largo de 12 días (cada día un número entero de horas). Demuestra que hubo un par de días consecutivos que ensayó al menos 19 horas.
4. Sean S y T dos conjuntos finitos tales que $|S| > k \cdot |T|$, y sea $f : S \rightarrow T$ una aplicación. Demuestra que al menos uno de los subconjuntos $f^{-1}(t)$, donde $t \in T$, tiene más de k elementos.
5. Sea un conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_9\}$ de números naturales diferentes cuya suma es 90. Demuestra que existen en este conjunto cuatro números cuya suma es al menos 40.
6. Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 7 se forman números de cinco cifras que no tengan ninguna repetida.
 - a) ¿Cuántos números se pueden formar?
 - b) ¿Cuántos de ellos son múltiplos de 4 y cuántos son múltiplos de 2?
7. ¿De cuántas formas se pueden colocar las letras de la palabra POLIINSATURADO de modo que se mantenga el orden en que aparecen las vocales?
8. Una mano de bridge consta de 13 cartas del conjunto de 52 de la baraja francesa.
 - a) ¿Cuántas manos de bridge son posibles?
 - b) ¿De cuántas formas se le puede dar a una persona 6 picas y 5 corazones?
9.
 - a) ¿Cuántos números enteros entre 1000 y 9999 satisfacen que la suma de sus dígitos es exactamente 9?
 - b) ¿Cuántos de los números anteriores tienen todas sus cifras diferentes de cero?
10. En una heladería se sirven 7 tipos de helados.
 - a) ¿De cuántas formas distintas se pueden elegir 12 helados?
 - b) ¿De cuántas maneras se pueden elegir 12 helados si tiene que haber al menos uno de cada tipo?
11. Un estudiante debe responder siete de las diez preguntas de un examen. ¿De cuántas formas puede hacer su elección si:
 - a) no hay restricciones?
 - b) debe contestar las dos primeras preguntas?

- c) debe responder al menos cuatro de las seis primeras preguntas?
12. En un lote de 100 ordenadores se sabe que 10 de ellos contienen circuitos integrados defectuosos. Se selecciona una muestra de 7 ordenadores de forma aleatoria para realizar un chequeo. ¿Cuántas muestras contienen:
- Tres circuitos defectuosos?
 - Al menos un circuito defectuoso?
13. ¿De cuántas formas puede sacar un jugador cinco naipes de una baraja francesa y obtener un full (trío más pareja)? ¿Y dobles parejas?
14. ¿Cuántas permutaciones de las letras de la palabra MISSISSIPPI no contienen dos o más letras I consecutivas?
15. Una casa para estudiantes universitarios está supervisada por el Sr. Morales. La casa tiene 5 pisos, cada uno de los cuales está dividido en 4 habitaciones. El próximo curso, tendrá 20 estudiantes, uno para cada una de las habitaciones. Entre los 20 estudiantes habrá 4 de tercer curso (Daniel, Fernando, Hugo y Antonio) y los otros 16 estudiantes serán de primer curso. ¿De cuántas formas puede asignar el Sr. Morales las habitaciones a los 20 estudiantes si Daniel y Fernando deben estar en el mismo piso?
16. ¿De cuántas formas se pueden distribuir 12 libros distintos entre cuatro niños de modo que:
- cada niño reciba tres libros?
 - los dos niños mayores reciban 4 libros y los dos menores dos libros cada uno?
 - dos niños reciben 4 libros y los otros dos, dos libros cada uno?
17. Queremos apostar en las quinielas (14 partidos, tres posibles resultados: 1, X, 2). Calcula el número mínimo de apuestas que debemos rellenar para asegurarnos el acierto en cada uno de los siguientes casos:
- se sabe que no saldrán símbolos iguales consecutivos,
 - se sabe que habrá exactamente 6 *doses*,
 - se sabe que habrá ocho "1", cuatro "X" y dos "2".
18. Determinése el coeficiente de x^9y^3 en:
- $(x + y)^{12}$,
 - $(x + 2y)^{12}$,
 - $(2x + 3y)^{12}$.
19. Determinése el coeficiente de
- xyz^2 en $(x + y + z)^4$,
 - xyz^2 en $(2x - y - z)^4$,
 - xyz^{-2} en $(x - 2y + 3z^{-1})^4$.
20. Determinése la suma de todos los coeficientes de
- $(x + y)^{10}$,
 - $(2s - 3t + 5u + 6v - 11w + 3x + 2y)^{10}$.
21. Dado un número real x y un entero positivo n , muéstrase que:
- $1 = (1 + x)^n - \binom{n}{1}x^1(1 + x)^{n-1} + \binom{n}{2}x^2(1 + x)^{n-2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}x^n$.
 - $1 = (2 + x)^n - \binom{n}{1}(x + 1)^1(2 + x)^{n-1} + \binom{n}{2}(x + 1)^2(2 + x)^{n-2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}(x + 1)^n$.
22. Resuelve las cuestiones siguientes
- ¿De cuántas formas pueden distribuirse cinco dulces diferentes entre diez personas si ninguna de ellas puede recibir más de una?

- b) ¿De cuántas formas pueden distribuirse cinco dulces idénticos entre diez personas si cualquiera de ellas puede recibir cualquier número de dulces?
- c) ¿De cuántas formas pueden distribuirse cinco dulces idénticos entre diez personas si ninguna de ellas puede recibir más de una?
- d) ¿De cuántas formas pueden distribuirse cinco dulces diferentes entre diez personas si cualquiera de ellas puede recibir cualquier número de dulces?
23. Determina las formas diferentes en que se pueden elegir 20 monedas de cuatro grandes recipientes que contienen monedas de diferente denominación. Cada recipiente contiene un solo tipo de monedas.
24. ¿De cuántas formas se pueden colocar 24 libros diferentes en cuatro estantes de modo que haya al menos un libro en cada repisa? Para cualquiera de estas disposiciones, considera que en cada repisa los libros deben estar colocados uno junto al otro y el primer libro a la izquierda.
25. Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$, señala cuántas aplicaciones $f : A \rightarrow A$ verifican (simultáneamente): $f^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \emptyset$, $f^{-1}(\{4, 5\}) = \{1, 3, 7\}$, $f^{-1}(\{8, 14\}) = \{8, 14\}$, $f^{-1}(\{11\}) = \{4, 5\}$.
26. ¿De cuántas formas se pueden colocar doce canicas del mismo tamaño en cinco recipientes distintos si:
- a) todas las canicas son negras?
- b) cada canica es de distinto color?
27. ¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la siguiente pareja de ecuaciones?

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &= 37 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned} \right\}$$

- ¿Cuántas de estas soluciones verifican que $x_1, x_2, x_3 > 0$?
28. ¿Cuántos números naturales de cuatro cifras significativas tienen sus cuatro dígitos diferentes en orden estrictamente creciente (como 1347 y 3689) o en orden estrictamente decreciente (como 6432 y 9531)? ¿Cuántos números naturales de cuatro cifras significativas tienen sus cuatro dígitos en orden creciente (como 3467, 2256 y 4777) o decreciente (como 7531, 9966, 5552)?
29. ¿De cuántas formas se pueden seleccionar 9 bolas de una bolsa que contiene tres bolas rojas, tres verdes, tres azules y tres blancas?
30. ¿Cuántos números de la seguridad social (secuencias de nueve dígitos) tienen al menos una vez cada uno de los dígitos 1, 3 y 7?
31. Si se lanza un dado cinco veces, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las cinco tiradas sea 20?
32. ¿De cuántas formas se pueden colocar todas las letras de la palabra INFORMACION de tal manera que ningún par de letras consecutivas aparezcan más de una vez? Queremos contar disposiciones como INNOOFRMATA y FORTMAIINON pero no INFORCINMOTA (donde IN aparece dos veces) o NORTFNOIAMI (donde NO aparece dos veces).
33. Determina el número de soluciones enteras para $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ donde $-5 \leq x_i \leq 10$ para todo i , $1 \leq i \leq 4$.