Ejercicios del Tema 2. Conjuntos, aplicaciones y relaciones

1. Describe los siguientes conjuntos dando una lista de sus elementos:
   i) El conjunto de los enteros no negativos tales que su doble es menor que 11.
   ii) $B = \{x \text{ tales que } x \in \mathbb{Z} \text{ y } x^2 < 12\}$.
   iii) $C = \{$cadenas de longitud menor o igual que 2 formadas con el alfabeto $A = \{0, 1\}\}$.
   iv) El conjunto de soluciones reales x de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

2. Consideremos el alfabeto $A = \{0, 1\}$ y los conjuntos

   $$C = \{\text{cadenas de longitud menor o igual que tres formadas con el alfabeto } A\}$$

   y $B = \{01, 110, 011, 0\}$. Indica si es verdadera o falsa cada una de las afirmaciones siguientes:

   a) $B = C$ b) $0 \in B$ c) $\{01\} \subseteq B$ d) $1 \in B$ e) $\emptyset \subseteq B$ f) $\emptyset \in B$

3. a) Completa cada apartado escribiendo $\in$ ó $\subseteq$ en lugar de **O**:
   - $\{2\}$ **O** $\{1, 2, 3\}$
   - 2 **O** $\{1, 2, 3\}$
   - $\{2\}$ **O** $\{1, 2, \{1\}, \{2\}\}$
   - $\{2\}$ **O** $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$
   - $\emptyset$ **O** $\{1, 2, 3\}$
   - $\mathbb{N}$ **O** $\mathbb{Z}$
   - $\{2\}$ **O** $\mathbb{Z}$
   - $\{2\}$ **O** $\mathbf{P}(\mathbb{Z})$

   b) Si $X = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, a, \{a\}, 0\}$, halla el cardinal de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.

4. i) Encuentra un contraejemplo de la afirmación siguiente:

   $$\text{Si } A \cap C = B \cap C, \text{ entonces } A = B.$$

   ii) Demuestra que si $(A \cap C) = (B \cap C)$ y $(A \cap C') = (B \cap C')$, entonces $A = B$.

5. Sean X, Y y Z tres conjuntos disjuntos dos a dos. Demuestra que si los conjuntos A y B cumplen que $A \subseteq X \cup Y$ y $B \subseteq X \cup Z$, entonces $A \cap B \subseteq X$.

6. Sean $A = \{\emptyset\}$ y $B = \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. Verifica que los siguientes enunciados son verdaderos:

   i) $\emptyset \in B$ ii) $A \in B$ iii) $A \subseteq B$ iv) $\{A\} \in B$ v) $\{A\} \subseteq B$

   ¿Cuáles son verdaderos si $A = \{0\}$?

7. Dados los conjuntos $X = \{\alpha, 0, \{\alpha, 0\}\}$, $Y = \{\alpha, 0, \{\alpha\}, \{0\}\}$ y $Z = \{\alpha, 0\}$, calcula los conjuntos $X \cap \mathcal{P}(Z)$, $Y \cap \mathcal{P}(Z)$ y $\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$.

8. Prueba las siguientes identidades:

   i) $A \cup (A \cap B) = A$
   ii) $A \cap (A \cup B) = A$
   iii) $A \setminus B = A \cap B'$
   iv) $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$
   v) $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$
   vi) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

9. Sean A y B dos subconjuntos de U. Demuestra que $A \oplus B' = \emptyset$ si, y sólo si, $\{A, B\}$ es una partición de U.

10. Cuando está a punto de salir de un restaurante, un hombre nota que tiene una moneda de 1 céntimo de euro, una de 5, una de 10, una de 20 y una de 50. ¿De cuántas formas puede dejar (al menos una de) sus monedas para la propina en los casos siguientes:

   I) si no hay restricciones,

   II) si quiere quedarse con algo de cambio,

   III) si quiere dejar al menos 10 céntimos de euro?

11. Determina si la aplicación $f : A \to A$ es inyectiva y/o sobreyectiva en los siguientes casos $A = \mathbb{Z}$ y $A = \mathbb{R}$. Si no es sobreyectiva, calcula la imagen de f:

   I) $f(x) = x + 7$

   II) $f(x) = -x^2 + x$

   III) $f(x) = x^3$

12. Sean el conjunto $A = \{a, b, c\}$ y la aplicación $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ definida por $f(X) = (A \setminus X) \setminus \{a\}$ para todo $X \in \mathcal{P}(A)$.

   I) Calcula $f(\varnothing)$ y $f(A)$.

   II) Estudia si es inyectiva y/o sobreyectiva.

13. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ aplicaciones, demuestra que:

   I) si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva,

   II) si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva,

   III) si $g \circ f$ es biyectiva, entonces f es inyectiva y g es sobreyectiva.

14. Sea $f : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ la aplicación definida por $f = \{(a, b), (b, a), (c, b)\}$, escribe $f \circ f$ y $f \circ f \circ f$ como conjunto de pares ordenados.

15. Sean $f : A \to B$, $g : A \to B$ y $h : B \to C$ aplicaciones tales que $h \circ f = h \circ g$. Demuestra que si h es inyectiva, entonces $f = g$.

16. Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$, demuestra que $(g \circ f)(A) \subseteq g(B)$. ¿Se verifica $g(B) \subseteq (g \circ f)(A)$? Justifica la respuesta.

17. Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to A$ aplicaciones tales que $h \circ g \circ f$ es inyectiva, $g \circ f \circ h$ es sobreyectiva y $f \circ h \circ g$ es sobreyectiva. Demuestra que f, g y h son aplicaciones biyectivas.

18. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathbf{R}$ la relación definida para a, $b \in A$ por: $a\mathbf{R}b$ si, y sólo si, $a < b + 2$.

   I) Escribe los pares que forman la relación $\mathbf{R}$ y estudia sus propiedades.

   II) Calcula la relación recíproca $\mathbf{R}^{-1} = \{(a, b) \text{ tales que } (b, a) \in \mathbf{R}\}$.

   III) Calcula su relación complementaria $\mathbf{R}' = \{(a, b) \text{ tales que } (a, b) \notin \mathbf{R}\}$.

   IV) Resuelve los anteriores apartados para la relación $a\ \mathbf{S}\ b \Leftrightarrow b$ es un múltiplo de a.

19. Prueba que la siguiente relación $\mathbf{R}$ definida en $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es de equivalencia y calcula las clases de equivalencia

$$\mathbf{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 4), (3, 2), (5, 5)\}.$$

20. Estudia las siguientes relaciones binarias definidas en el conjunto $\mathbb{Z}$:

   I) $x\ \mathbf{R}\ y \Leftrightarrow xy > 0$.

   II) $x\ \mathbf{R}\ y \Leftrightarrow xy \geq 0$.

21. Estudia las siguientes relaciones binarias definidas el conjunto $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

    I) $(x, y)\ \mathbf{R}\ (z, t) \Leftrightarrow x + t = y + z$ II) $(x, y)\ \mathbf{R}\ (z, t) \Leftrightarrow x \leq z$

22. En el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se considera la relación:

$$(a, b)R(c, d) \texttt{ si y sólo si } \exists m, n \in \mathbb{Z} \texttt{ tal que } a - c = 2m \wedge b - d = 3n$$

    Demuestra que es una relación de equivalencia, calcula el número de clases de equivalencia y busca un representante de cada clase que esté a distancia mínima del origen $(0, 0)$.

23. Sea el conjunto

$$A = \{(0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (0,1), (1,1), (2,1), (3,1), (0,2), (1,2), (2,2), (3,2)\}$$

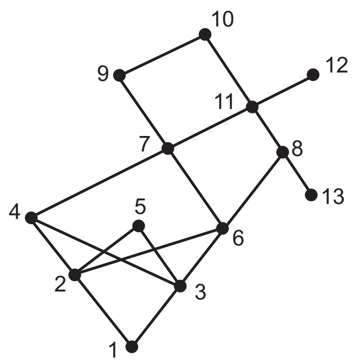
    y sea la relación $(a, b)R(c, d)$ si y sólo si $a \leqslant c$ y $b \leqslant d$.
    Demuestra que R es una relación de orden.
    Representa el diagrama de Hasse de esta relación.
    Determina (si existen) las cotas inferiores, las cotas superiores, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo del conjunto $B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$.

24. Sea X un conjunto no vacío, $(\mathbb{N}, \leq)$ el conjunto de los números naturales con el orden usual y $f : X \to \mathbb{N}$ una aplicación. Se define en X la relación $x\mathbf{R}y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$. Demuestra que :

    I) la relación $\mathbf{R}$ no es necesariamente una relación de orden.

    II) $\mathbf{R}$ es una relación de orden si la aplicación f es inyectiva.

25. La figura representa el diagrama de Hasse para un conjunto parcialmente ordenado A.



    Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, para $B = \{4, 5, 6, 7, 8\} \subseteq A$,

    I) 7 es maximal de B y 12 es cota superior de B en A.

    II) 5 es maximal de B y 1 un mínimo de A.

    III) 5 es minimal de B y 10 maximal de A.

    IV) 1 es cota inferior de B en A y 1 es un mínimo de A.

26. Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 30, 60\}$ con la relación "ser divisor". Halla los elementos maximales y los minimales de $B = \{3, 4, 5, 6, 30\}$ y las cotas inferiores de B en A.