Capítulo 1

Lógica

En este tema daremos una breve introducción a la lógica. En cualquier disciplina científica, se necesita distinguir entre argumentos válidos y no válidos. Para ello, se utilizan, a menudo sin saberlo, las reglas de la lógica. Algunas de ellas las estudiaremos en este tema. Utilizaremos estas técnicas en las demostraciones de cualquiera de los razonamientos matemáticos e informáticos que nos vamos a encontrar. Es interesante destacar que, en ningún caso, debemos recurrir a la aplicación mecánica de tales reglas, sino que, en cada situación, hemos de tratar de analizar y comprender el razonamiento planteado.

Con un número finito de palabras y de construcciones gramaticales, se pueden construir una infinidad de frases. De la misma forma, con un número finito de proposiciones y conectores lógicos, se pueden construir infinitos razonamientos. La lógica de proposiciones tiene que elaborar métodos lo suficientemente potentes para tratar cualquiera de estos razonamientos.

1.1. Proposiciones

Diremos que una *proposición* o enunciado es una oración declarativa de la que puede decirse si es verdadera o falsa pero no ambas cosas a la vez; es decir, a la que le asignaremos uno y uno sólo de los valores de verdad: verdadero (1) o falso (0), sin ambiguedades como en los lenguajes naturales.

Ejemplo 1. *Los siguientes enunciados son proposiciones:*

- *Séneca fué un filósofo. (1)*
- *Aristóteles fue presidente de E.E.U.U.(0)*
- *El Deportivo ganó la última liga de fútbol profesional. (0)*

- $2 + 2 = 4$ *(1)*
- $2 + 4 = 7$ *(0),*

Ejemplo 2. *Los siguientes enunciados no son proposiciones:*

- *Ojalá llueva.*
- $x + 3 = 4$
- $x = -x$
- *Paradoja del barbero: En un pueblo, el barbero afeita a todos los hombres que no se afeitan a sí mismos (y únicamente a ellos)*

  `El barbero se afeita a sí mismo.`

  El enunciado no puede ser verdadero ya que si el barbero se afeitase a sí mismo, no formaría parte del grupo de hombres que él afeita. Por otro lado, no puede ser falso ya que, en ese caso, el barbero no se afeitaría a sí mismo y entonces debería ser afeitado por el barbero.

El cálculo proposicional es el estudio de las relaciones lógicas entre las proposiciones. Su objetivo es, por una parte, estudiar la validez de argumentos y, por otro lado, la formalización de argumentos del lenguaje natural.

Distinguiremos dos tipos de lenguaje:

- **Lenguaje objeto**, que es el lenguaje formal de la lógica que estudiamos.
- **Metalenguaje**, el idioma donde discutimos el lenguaje formal.

1.2. Operaciones Lógicas

Sintaxis Las proposiciones anteriores suelen designarse con letras minúsculas p, q, r, etc y se denominan *primitivas (simples)* ya que no hay forma de descomponerlas en otras más simples. Para obtener nuevas proposiciones llamadas *compuestas* se utilizan los *conectivos u operadores lógicos*. Los valores de verdad de las proposiciones resultantes dependerán de los valores de verdad de las proposiciones componentes. Nosotros utilizaremos, como símbolos, $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

- **Negación** $\neg p$. Se lee "no p; no ocurre p; no es cierto p".

p	$\neg p$
0	1
1	0

- **Conjunción** $p \wedge q$. Se lee "p y q; p sin embargo q; p no obstante q".

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- **Disyunción** $p \vee q$. Se lee "p o q, al menos p o q; como mínimo p o q" (inclusivo).

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- **Condicional** $p \rightarrow q$. Se lee "Si p, entonces q; p es suficiente para q; q es necesario para p; q siempre que p ; p sólo si q; q si p."

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- **Bicondicional** $p \leftrightarrow q$. Se lee "p, si, y sólo si, q; p es necesario y suficiente para q".

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Hay que hacer notar que el sentido de los conectores no coincide exactamente con el sentido que tienen en el lenguaje natural (metalenguaje). Por ejemplo, en lógica, el **y** se interpreta de tal manera que las proposiciones siguientes son equivalentes:

- Arturo se pone los calcetines y los zapatos.
- Arturo se pone los zapatos y los calcetines.

En el metalenguaje, no es así. La conjunción "y" puede expresar una idea de sucesión, con lo cual las frases no son equivalentes.

Comprender el significado del condicional es muy importante, y para ello damos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. *Un político X promete en campaña electoral: "Si resulto elegido presidente, bajaré los impuestos". Llamemos:*

- p : *"El político X es elegido presidente"*
- q : *"Se bajan los impuestos"*

La promesa del político se simboliza $p \to q$ y se lee "Si p, entonces q". Se pueden distinguir cuatro casos:

i) *p y q son ambas verdaderas, es decir el candidato es elegido presidente y baja los impuestos. Se cumple la promesa y el valor de verdad de la condicional es 1.*

ii) *p es verdadera (El político X es elegido presidente) pero q es falsa (no baja los impuestos). Entonces, la promesa se ha roto y el valor de verdad de $p \to q$ es 0.*

iii) *p y q son ambas falsas (El político X no resulta elegido y no se bajan los impuestos). La promesa no se ha roto ya que, al no haber sido elegido presidente, el candidato no tiene potestad para bajar los impuestos, por lo que el valor de verdad de $p \to q$ es 1.*

iv) *Finalmente, p es falsa (El candidato no resulta elegido) y q es verdadera (los impuestos bajan). Puede ser que el nuevo presidente esté de acuerdo con nuestro candidato en bajar los impuestos y lo haga al llegar al poder. Tampoco, en este caso, se rompe la promesa y el valor de verdad de la condicional sigue siendo 1.*

Ejemplo 4. *Fijémonos en la diferencia entre el argumento anterior y el siguiente: "El padre de Juan le dice a éste: Te compraré un ordenador si, y solamente si, apruebas la Selectividad". En este caso, lo simbolizaríamos como $p \leftrightarrow q$. También, aqui hay cuatro posibilidades:*

i) *p y q son ambas verdaderas, es decir Juan aprueba la Selectividad y su padre le compra el ordenador. Se cumple la promesa y el valor de verdad de la bicondicional es* 1.

ii) *p es verdadera (Juan aprueba la Selectividad) pero q es falsa (su padre no le compra el ordenador). Entonces, la promesa se ha roto y el valor de verdad de $p \leftrightarrow q$ es* 0.

iii) *p y q son ambas falsas (Juan suspende la Selectividad y su padre no le compra el ordenador). La promesa no se ha roto ya que Juan no ha cumplido su parte, por lo que el valor de verdad de $p \leftrightarrow q$ es* 1.

iv) *Finalmente, p es falsa (Juan suspende) y q es verdadera (su padre le compra el ordenador). Como el padre dejo claro que solamente se compraría el ordenador si Juan aprobaba, el valor de verdad de $p \leftrightarrow q$ es* 0.

Al conectar entre sí las proposiciones mediante los operadores lógicos, se obtienen expresiones bien formadas (b.f.). Sólo hay que tener en cuenta:

i) Las proposiciones primitivas son siempre expresiones b.f..

ii) Si $\mathcal{P}$ es una expresión b.f., $\neg\mathcal{P}$ tambien lo es.

iii) Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son expresiones b.f., tambien lo son $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ y $\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$.

iv) No hay más reglas.

Para la correcta relación entre las proposiciones y los conectivos en las fórmulas bien formadas, hay que tener en cuenta que *no deben aparecer conectivas adyacentes salvo la negación* [1].

Además, cuando hay más de una conectiva en una fórmula, entenderemos que cada conectiva afecta a la letra proposicional inmediata o, al conjunto de proposiciones inmediatas encerradas entre paréntesis. Se establece una jerarquía de prioridades entre las conectivas. En el primer nivel se situa la negación, en el segundo nivel la conjunción y la disyunción y en último nivel el

[1] Así, la proposición $p \to \neg q$ sería correcta mientras que $p \to \wedge q$ no lo es.

condicional y el bicondicional. La prioridad dentro del mismo nivel se indica con paréntesis. [2] Si tenemos la proposición compuesta

$$(\neg p \vee q) \wedge (r \to t)$$

y la escribiésemos sin paréntesis, tendríamos:

$$\neg p \vee q \wedge r \to t$$

que, según los niveles de prioridad establecidos, podría equivaler a:

$$[\neg p \vee (q \wedge r)] \to t$$

o a

$$[(\neg p \vee q) \wedge r] \to t.$$

Sea $\mathcal{P}$ una proposición compuesta y llamemos $\sum$ al conjunto de sus proposiciones primitivas componentes. Una aplicación :

$$\sum \xrightarrow{\phi} \{0,1\}$$

es una *interpretación* de $\mathcal{P}$. Si $\mathcal{P}$ resulta ser verdadera, ϕ se denomina *modelo* y, si $\mathcal{P}$ es falsa, ϕ se denomina *contraejemplo*. Así, si p y q son dos proposiciones primitivas, entonces $\phi(p) = 0$ y $\phi(q) = 1$ es un contraejemplo para $p \wedge q$ y un modelo para $p \vee q$. Sin embargo, $\phi(p) = \phi(q) = 1$ es un modelo para ambas.

Diremos que un conjunto $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ de proposiciones es *consistente* si la conjunción de todas ellas $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$ admite algún modelo.

Ejemplo 5.

- *El conjunto* $\{p \to q,\ p \wedge q\}$ *es consistente ya que admite un modelo (*p *y* q *verdaderas).*

- *El conjunto* $\{p \to q,\ p \wedge \neg q\}$ *es inconsistente ya que no admite ningún modelo (El único modelo de* $p \wedge \neg q$ *es un contraejemplo de* $p \to q$*).*

[2] Otra posibilidad es establecer un orden total que viene dado por

$$\{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}.$$

1.3. Tablas de Verdad

El método de las tablas de verdad es mecánico, pero tedioso, y permite decidir si una fórmula dada es válida. Una *tabla de verdad* para una proposición compuesta construida a partir de proposiciones p, q, r, etc, es un método que proporciona los valores de verdad de la proposición compuesta, a partir de los valores de verdad de p, q, r, etc. Para construirla se determinan los valores de verdad de las subproposiciones desde las más sencillas hasta las más complejas. Se procede desde el interior al exterior como se hace cuando se quiere calcular el valor de la expresión $(5^2 + 7 \cdot 5)$, se comienza por calcular el valor del cuadrado de 5 y el producto de 7 por 5, después se hace la suma de los cálculos precedentes. Por ejemplo, la tabla de verdad de $(p \vee q) \wedge (p \to \neg q)$ será

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	$p \to \neg q$	$(p \vee q) \wedge (p \to \neg q)$
0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0

Cada fila de la tabla de verdad de una proposición $\mathcal{P}$ es una **interpretación** de $\mathcal{P}$. Si $\mathcal{P}$ está formada por n proposiciones primitivas, hay 2^n posibles interpretaciones de $\mathcal{P}$ y, en consecuencia 2^n filas en la tabla de verdad de $\mathcal{P}$. En el ejemplo anterior, la primera y la última fila se corresponden con contraejemplos y las otras dos son modelos.

Se pueden "simplificar" las tablas de verdad utilizando otra forma de disponer las proposiciones. Para el ejemplo anterior, nos quedaría:

	p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge (p \to \neg q)$	$p \to \neg q$	$\neg q$
	0	0	0	0	1	1
	0	1	1	1	1	0
	1	0	1	1	1	1
	1	1	1	0	0	0
Paso	1		2	4	3	2

El valor de verdad de cada paso queda determinado por los valores de verdad de los pasos anteriores.

Cuando una proposición compuesta es siempre verdadera, independientemente de los valores de verdad de sus proposiciones componentes, se denomina *tautología* y se denotará T_0 o $\top$. Recíprocamente, cuando una proposición compuesta es siempre falsa, se denominará *contradicción* y se denotará F_0 o $\perp$. Tambien podríamos decir que, si cualquier interpretación de $\mathcal{P}$ es un modelo (resp. un contraejemplo), entonces $\mathcal{P}$ es una tautología (resp. una contradicción).

Ejemplo

I) $p \vee \neg p$ es una tautología.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
0	1	1
1	0	1

II) $p \wedge \neg p$ es una contradicción.

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
0	1	0
1	0	0

III) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ es una tautología.

p q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg p$ $\neg q$
0 0	0	1	1	1	1 1
0 1	0	1	1	1	1 0
1 0	0	1	1	1	0 1
1 1	1	0	1	0	0 0

1.4. Implicaciones y Equivalencias lógicas

Consideremos las dos afirmaciones siguientes:

- El laboratorio está bien distribuido y bien equipado.
- El laboratorio está bien equipado y bien distribuido.

Trivialmente, estas dos afirmaciones tienen siempre los mismos valores de verdad, y, por tanto, decimos que son lógicamente equivalentes. Para hacer más precisa esta idea, traduzcámosla a la lógica. Si P expresa la proposición "el laboratorio está bien distribuido" y Q expresa la proposición "el laboratorio está bien equipado", entonces la primera de las dos afirmaciones se traduce en $P \wedge Q$, mientras que la segunda se traduce $Q \wedge P$. Mediante las tablas de verdad se puede comprobar que estas dos expresiones tienen los mismos valores de verdad para todas las asignaciones posibles; esto es, $(Q \wedge P) \leftrightarrow (P \wedge Q)$ es una tautología.

Definición 1. *Dos proposiciones compuestas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son* lógicamente equivalentes*, si tienen los mismos valores de verdad para cada interpretación de los valores de verdad de sus proposiciones componentes. Esta situación la denotaremos:*

$$\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}.$$

Así pues, se tiene que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son lógicamente equivalentes si, y sólo si, $\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$ es una tautología. La diferencia entre " $\Longleftrightarrow$ " y " $\leftrightarrow$ " es importante ya que, mientras $\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$ quiere decir que $\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$ es una tautología, cuando escribimos $\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$ simplemente estamos denotando una proposición compuesta.

Ejemplo La proposición compuesta $p \wedge q \leftrightarrow q$ no es una tautología, por lo que $p \wedge q$ y q no son lógicamente equivalentes.

p q	$p \wedge q$	$\leftrightarrow$
0 0	0	1
0 1	0	0
1 0	0	1
1 1	1	1

Definición 2. *Dadas dos proposiciones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$, se dice que $\mathcal{P}$* implica lógicamente *$\mathcal{Q}$, o que, de $\mathcal{P}$* se deduce *$\mathcal{Q}$, si $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ es una tautología. Esta situación la denotaremos*

$$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$$

y significa que, cuando $\mathcal{P}$ es verdadera, también $\mathcal{Q}$ es verdadera y que cuando $\mathcal{Q}$ es falsa, $\mathcal{P}$ es falsa.

Teorema 1. *Las siguientes tablas recogen algunas equivalencias e implicaciones lógicas:*

Principales equivalencias lógicas	
Leyes Conmutativas	$p \vee q \Longleftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Longleftrightarrow q \wedge p$
Leyes Asociativas	$(p \vee q) \vee r \Longleftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \Longleftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
Leyes Distributivas	$p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Ley de la doble negación	$\neg\neg p \Longleftrightarrow p$
Leyes de Morgan	$\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ $\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
Leyes de dominación	$p \vee T_0 \Longleftrightarrow T_0$ $p \wedge F_0 \Longleftrightarrow F_0$
Leyes de Identidad	$p \wedge T_0 \Longleftrightarrow p$ $p \vee F_0 \Longleftrightarrow p$
Leyes de la negación	$p \vee \neg p \Longleftrightarrow T_0$ $p \wedge \neg p \Longleftrightarrow F_0$
Ley de la Contraposición	$(p \rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
Leyes de la Implicación	$(p \rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee q)$ $(p \rightarrow q) \Longleftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
Leyes de la Equivalencia	$(p \leftrightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$ $(p \leftrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
Leyes Idempotentes	$p \Longleftrightarrow (p \wedge p)$ $p \Longleftrightarrow (p \vee p)$
Ley de la reducción al absurdo	$(p \rightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \wedge \neg q) \rightarrow F_0]$

Principales implicaciones lógicas	
Modus Ponens	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \Longrightarrow q$
Modus Tollens	$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \Longrightarrow \neg p$
Silogismo	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Longrightarrow (p \rightarrow r)$
Leyes de simplificación	$(p \wedge q) \Longrightarrow p$ $(p \wedge q) \Longrightarrow q$
Leyes de adición	$p \Longrightarrow (p \vee q)$ $q \Longrightarrow (p \vee q)$
Silogismo disyuntivo	$((p \vee q) \wedge \neg p) \Longrightarrow q$ $((p \vee q) \wedge \neg q) \Longrightarrow p$
Ley de casos	$[(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)] \Longrightarrow q$
Ley de inconsistencia	$[p \wedge \neg p] \Longrightarrow q$

Las siguientes reglas de "substitución" serán de gran utilidad. Sea $\mathcal{P}$ una proposición compuesta de la cual forma parte la proposición Q

- Si $\mathcal{P}$ es una tautología y cada aparición de Q en $\mathcal{P}$ se substituye por una proposición Q^*, obtenemos una proposición $\mathcal{P}^*$ que resulta ser también una tautología. Sabemos, por ejemplo que:

  $$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

  es una tautología. Si reemplazamos p por $r \vee s$, obtenemos de nuevo una tautología:

  $$\neg((r \vee s) \vee q) \leftrightarrow (\neg(r \vee s) \wedge \neg q)$$

- Si $\mathcal{P}$ es una proposición arbitraria y se substituyen una o más ocurrencias de Q en $\mathcal{P}$ por una proposición Q^* lógicamente equivalente a Q, obtendríamos una proposición $\mathcal{P}^*$ lógicamente equivalente a $\mathcal{P}$. De este modo, si consideramos $\mathcal{P}$

  $$\neg(p \vee q) \rightarrow r$$

  se tiene que $\mathcal{P}$ es lógicamente equivalente a:

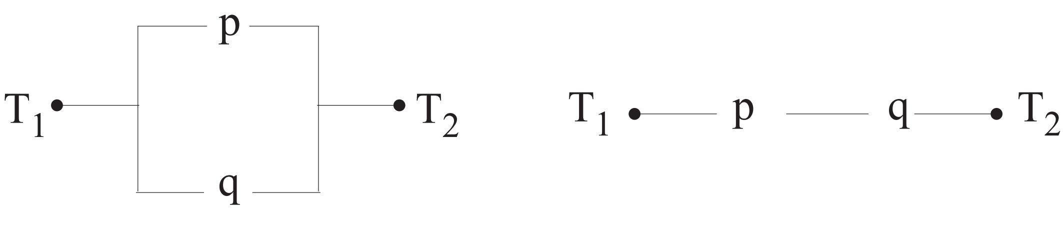
  $$(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow r$$

Ejemplo 6. *Simplificar* $(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)$

$$\begin{array}{lll}
(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) & \Longleftrightarrow & \textit{Leyes de Morgan y Doble negación} \\
(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) & \Longleftrightarrow & \textit{Leyes distributivas} \\
p \vee (q \wedge \neg q) & \Longleftrightarrow & \textit{Contradicción} \\
p \vee F_0 & \Longleftrightarrow & p
\end{array}$$

Ejemplo 7. *Una red de comunicación está formada por cables e interruptores que conectan dos terminales T_1 y T_2. Cualquiera de los interruptores puede estar abierto (0), de manera que no permite el paso de la corriente, o cerrado (1), de forma que la corriente pasa a través de el.*

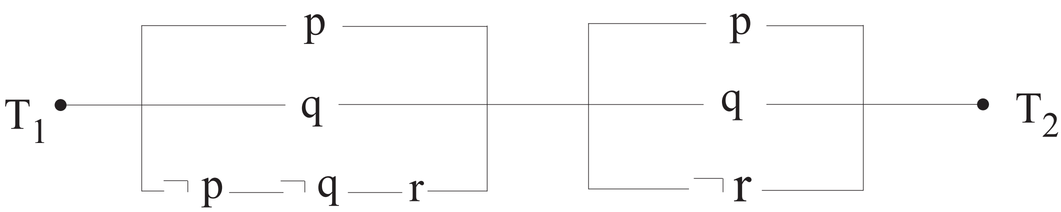
En la red a) la corriente fluye de T_1 a T_2 si p o q están cerrados. Se llama red en paralelo *y la representamos $p \vee q$. En cambio, en la red b), necesitamos que tanto p como q estén cerrados para que haya paso de corriente desde T_1 a T_2. Se llama red en* serie *y se representa $p \wedge q$.*



(a) $p \vee q$ (b) $p \wedge q$

Utilizando esto y las leyes lógicas anteriores se pueden simplificar circuitos lógicos.

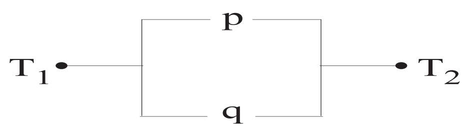
Ejemplo 8. *Consideremos el circuito*



escrito en notación lógica y simplificado resultaría:

$$\begin{array}{lll}
(p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)) \wedge (p \vee q \vee \neg r) & \iff & \text{(Leyes de Morgan)} \\
((p \vee q) \vee (\neg(p \vee q) \wedge r)) \wedge (p \vee q \vee \neg r) & \iff & \text{(Leyes distributivas y 1)} \\
((p \vee q) \vee \neg(p \vee q)) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) & \iff & \text{(1 y Leyes distributivas)} \\
T_0 \wedge [((p \vee q) \vee (r \wedge \neg r)] & \iff & \text{(1)} \\
(p \vee q) \vee F_0 & \iff & \text{(1)} \\
p \vee q & &
\end{array}$$

expresión que se corresponde con el circuito lógico:



1.5. Teoremas y Demostraciones

Un *Teorema* es un enunciado (matemático) cuya veracidad se confirma por medio de un argumento válido o *demostración*.

Un teorema consiste siempre en algunas proposiciones $H_1, H_2, \cdots, H_n$ llamadas *hipótesis o premisas* y una proposición C llamada *conclusión*. El argumento es válido siempre que

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Longrightarrow C$$

o, lo que es lo mismo:

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \rightarrow C$$

es una tautología. Esta situación se denota tambien

$$\{H_1, H_2, \ldots, H_n\} \Longrightarrow C$$

y diremos que de las premisas se puede deducir la conclusión. Precisamente este es el tipo más natural de demostración llamada *demostración directa*. En particular, todas las implicaciones lógicas ya vistas (modus ponens, modus tollens, silogismo, etc) son ejemplos de argumentos válidos.

Ejemplo 9. *Demostrar la implicación lógica "Modus ponens", es decir*

$$p \wedge (p \rightarrow q) \Longrightarrow q$$

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$
0	*0*	*1*	*0*	*1*
0	*1*	*1*	*0*	*1*
1	*0*	*0*	*0*	*1*
1	*1*	*1*	*1*	*1*

Si llamamos $\mathcal{P} = p \wedge (p \rightarrow q)$, es evidente que, de $\mathcal{P}$ se deduce q, ya que siempre que $\mathcal{P}$ es verdadera, también lo es q y, cuando q es falsa, también es falsa $\mathcal{P}$.

También son argumentos válidos la regla de la conjunción $\{p, q\} \Longrightarrow p \wedge q$, la ley de contradicción $\{\neg p \rightarrow F_0\} \Longrightarrow p$ y la ley de demostración por casos $\{p \rightarrow r, q \rightarrow r\} \Longrightarrow p \vee q \rightarrow r$.

Ejemplo 10. *Demostrar la implicación*

$$(p \to r) \wedge (q \to r) \Longrightarrow p \vee q \to r$$

p	q	r	$p \to r$	$q \to r$	$p \vee q \to r$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Observando la tabla anterior, podríamos fijarnos únicamente en las filas una, dos, cuatro, seis y ocho ya que el condicional solamente es falso si la premisa es verdadera y la conclusión falsa. Por lo tanto, basta comprobar aquellas filas donde todas las hipótesis son verdaderas, es decir, todos los modelos de las premisas (o hipótesis) han de ser modelos de la conclusión.

Una segunda opción para realizar una demostración directa es utilizar una sucesión de proposiciones, que terminan con la conclusión **C**, y que se consideran válidas por alguna de las siguientes razones:

i) Es una de las hipótesis.

ii) Es una tautología conocida (equivalencia lógica).

iii) Se deriva de alguna de las proposiciones anteriores por reglas de sustitución.

iv) Se puede inferir de proposiciones anteriores mediante reglas de inferencia.

Las **reglas de inferencia** son técnicas que nos ayudan en las demostraciones de los teoremas. Cada regla de inferencia tiene su origen en una *implicación lógica.*

Ejemplo 11. *Demostrar el argumento*

$$(p \to r) \wedge (q \to r) \Longrightarrow p \vee q \to r$$

i) $p \to r$; *hipótesis*

ii) $q \to r$; *hipótesis*

iii) $\neg p \vee r$; *equivalencia lógica*

iv) $\neg q \vee r$; *equivalencia lógica*

v) $(\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$; *regla de la conjunción*

vi) $(\neg p \wedge \neg q) \vee r$; *distributiva*

vii) $\neg(p \vee q) \vee r$; *ley de Morgan*

viii) $p \vee q \to r$; *equivalencia lógica.*

Un tipo de demostración indirecta es la *contraposición*. Este tipo de demostración esta basada en la tautología: $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$, en nuestro caso:

$$\neg C \Longrightarrow \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n)$$

Ejemplo 12. *Si a y b son números naturales y $a + b \geq 25$, entonces $a \geq 13$ ó $b \geq 13$. Denotemos:*

- $p : a \geq 13$
- $q : b \geq 13$
- $r : a + b \geq 25$

Queremos demostrar que $r \Longrightarrow p \vee q$. Para ello veremos que $\neg(p \vee q) \Longrightarrow \neg r$. Tengamos en cuenta que, por las leyes de Morgan

$$\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q).$$

Ahora bien, si $a \leq 12$ y $b \leq 12$, entonces $a + b \leq 24$, es decir, la proposición r es falsa, entonces $r \Longrightarrow p \vee q$ es verdadera.

Otro tipo de demostración indirecta es la demostración por *contradicción o reducción al absurdo*, que consiste en probar

$$\neg C \wedge H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Longrightarrow F_0$$

Ejemplo 13. *Si mis cálculos son correctos y pago la cuenta de la electricidad, me quedaré sin dinero. Si no pago la cuenta de la electricidad, me cortarán la corriente. Como no me han cortado la corriente y sigo teniendo dinero, mis cálculos no eran correctos.*

- p : *“Mis cálculos son correctos”*
- q : *“Pago la cuenta de la electricidad”*
- r : *“Me quedo sin dinero”*
- s : *“Me cortan la corriente”*

Se trata de probar que de $\{(p \wedge q) \rightarrow r, \neg q \rightarrow s, \neg r, \neg s\}$*, se deduce* $\neg p$*, o, equivalentemente, que*

$$((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow s) \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge p \Longrightarrow F_0$$

Aplicando las equivalencias e implicaciones lógicas (reglas de inferencia), tenemos que:

$$\begin{array}{ll} ((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow s) \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge p & \Longrightarrow \\ ((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge q \wedge \neg r \wedge p & \Longrightarrow \\ r \wedge \neg r & \Longleftrightarrow \\ F_0 & \end{array}$$

Nota 1. *Es interesante destacar que el teorema*

$$\{H_1, H_2, \ldots, H_n\} \Longrightarrow C$$

es válido si, y sólo si, el conjunto

$$\{H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C\}$$

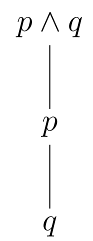
es inconsistente.

1.6. Tablas o Árboles Semánticos

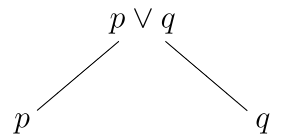
Precisamente el método de demostración por contradicción o reducción al absurdo nos permite utilizar las llamadas *tablas semánticas*[3] para comprobar si un argumento es o no válido. El método (descubierto en los años cincuenta por **Beth y Hintikka**, independientemente uno del otro) permite saber si una proposición es una contradicción. Para ello, se construye un árbol donde

[3]Quizás sería más adecuado el nombre de árbol semántico.

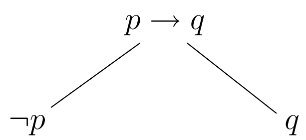
los nodos (finitos) son las proposiciones, el conectivo $\wedge$ se representa por un arista vertical,



y el conectivo $\vee$ por un par de aristas en la forma



El resto de los conectivos se traducen a esa forma. Así, el condicional $p \rightarrow q$ se representa como

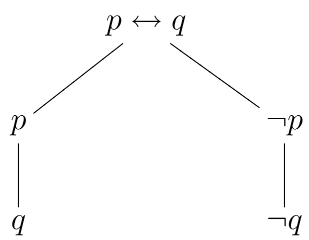


ya que $p \rightarrow q \Longleftrightarrow \neg p \vee q$

Por otro lado, como

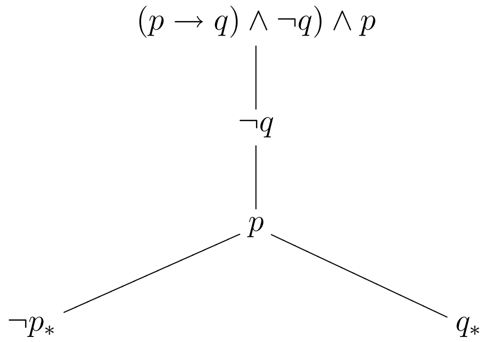
$$\begin{aligned} p \leftrightarrow q &\Longleftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \\ &\Longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge p) \vee (q \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) \\ &\Longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \end{aligned}$$

la bicondicional se representará

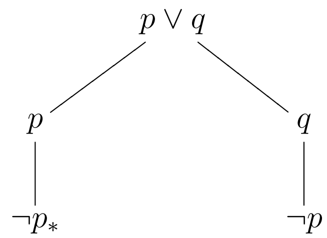


En este método, se van descomponiendo, por turno, cada proposición compuesta, de acuerdo con las reglas anteriores, marcando dicha proposición como ya utilizada. Conviene descomponer primero los bicondicionales y sus negaciones antes que otras conectivas que creen ramas. Si en una sucesión de nodos del árbol (*camino*), aparece una proposición y su negación, se dice que es un camino cerrado y se marca con $*$ el nodo final. Si al final del proceso todos los caminos se cierran, la proposición es una contradicción; en caso contrario, cada camino abierto es un modelo de la proposición inicial. Así pues, si queremos demostrar o refutar un argumento del tipo $H \Longrightarrow C$ calculamos la tabla semántica de $H \wedge \neg C$. Si al finalizar todos los caminos se cierran, tenemos que $H \wedge \neg C$ es una contradicción, es decir, el argumento $H \Longrightarrow C$ es válido. Por el contrario, la existencia de una rama abierta nos llevará a concluir que el argumento no es válido. Del mismo modo, si tenemos un sistema de proposiciones $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, sabremos que es consistente, si al construir la tabla semántica de $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$, nos queda algún camino abierto que representará un modelo para dicho sistema.

Ejemplo 14. I) *Demostrar el "modus tollens":* $((p \to q) \wedge \neg q) \Longrightarrow \neg p$



II) *Demostrar o refutar* $\{p \vee q\} \Longrightarrow p$



En este ejemplo vemos que $\{\neg p, q\}$ *es un contraejemplo ya que si* p *es falsa y* q *verdadera,* $p \vee q$ *es verdadera y* $(p \vee q) \to p$ *es falsa.*

III) *Si hay probabilidad de lluvia o hace viento, Manuel no cortará el cesped. Siempre que no hay nubes en el cielo, no hay probabilidad de que llueva. Hoy no hace viento y no hay nubes en cielo. Entonces, Manuel cortará el cesped.*

Llamemos:

- *p: "Hay probabilidad de lluvia"*
- *q: "Hace viento"*
- *n: "Hay nubes en el cielo"*
- *c: "Manuel cortará el cesped"*

Se trata de ver si, de las hipótesis:

$$\{((p \vee q) \to \neg c), \neg n \to \neg p, \neg q, \neg n\}$$

se puede deducir c. Al desarrollar la tabla, se comprueba que

$$\{\neg p, \neg q, \neg n, \neg c\}$$

es un contraejemplo, ya que aunque no llueva y no haga viento, nadie nos permite asegurar que Manuel vaya a cortar el cesped.

Las principales ventajas de las tablas semánticas respecto a las tablas de verdad son:

i) Es menos costoso de aplicar.

ii) Es una buena base para programar demostradores automáticos.

iii) Puede extenderse a otras lógicas más potentes que la lógica de proposiciones, para las cuales el método de las tablas de verdad deja de tener sentido.

iv) En el caso de que el argumento no sea válido las tablas semánticas nos muestran explicitamente un contraejemplo.

1.7. Cuantificadores

Desde el comienzo del tema sabemos que un enunciado del tipo "$x + 2$ es un número par" no es una proposición, ya que, si $x = 1$, entonces el enunciado es falso y, si $x = 2$, el enunciado es verdadero. Este sería un ejemplo de proposición abierta, cuyo valor de verdad o falsedad depende del valor que tome una (o varias variables) que recorren un cierto conjunto llamado dominio.

Por otro lado, el cálculo proposicional no permite trabajar con una infinidad de proposiciones. Por ejemplo, si denotamos la proposición anterior

$$p(x) : \text{“}(x + 2) \text{ es un número par”}$$

y, queremos expresar que $p(x)$ es cierta cuando x es un entero par, diríamos que:

$$p(2) \wedge p(4) \wedge \ldots$$

es cierta; si lo que queremos es significar que una proposición $p(x)$ es cierta para algún valor natural de x, diríamos que:

$$p(1) \vee p(2) \vee \ldots$$

es cierta.

Para solucionar este problema, se utilizan los *cuantificadores*. Supongamos que $p(x)$ es una proposición si la variable x pertenece a un determinado conjunto U llamado dominio. El *cuantificador universal* "$\forall$" se utiliza para construir proposiciones del tipo

- $$\forall x\ p(x)$$

  que se leen "para todo x, $p(x)$", o bien, "para cada", o bien, "para cualquier". Este tipo de proposición es verdadera cuando $p(x)$ es verdadera para cualquier valor x de U. Es falsa, si para algún valor de U, $p(x)$ es falsa. Por ejemplo: "Todos los alumnos de I.I. tienen más de 16 años" es una proposición verdadera. "Todos los alumnos de I.I. de la Universidad de A Coruña nacieron en A Coruña" es una proposición falsa.

- $$\forall x\ \neg p(x)$$

  que se lee "para todo (cada o cualquiera) x, no se verifica $p(x)$". Será verdadera cuando $p(x)$ sea falsa para todos los valores x de U. Será falsa cuando se verifique $p(x)$, para algún valor x de U.

El *cuantificador existencial* "$\exists$" se utiliza para proposiciones del tipo:

- $$\exists x\ p(x)$$

  que se leen "existe x que verifica $p(x)$". Es verdadera cuando $p(x)$ es verdadera para, al menos, un valor x de U. Es falsa cuando, para todo valor x de U, la proposición $p(x)$ es falsa. "Existe un entero x que sumado con 1 nos da 0" es verdadero. "Existe un entero x que sumado con 1 nos da x" es un argumento falso.

- $$\exists x \, \neg p(x)$$
  que se lee "existe un x tal que no se verifica $p(x)$". Es verdadero cuando $p(x)$ es falsa para algún valor x y es falsa cuando todos los valores de x hacen que $p(x)$ sea verdadera.

Las **leyes de Morgan generalizadas** son ciertas cualquiera que sea el universo del discurso y cualquiera que sea el valor de las proposiciones. Estas son:

I) $\neg[\forall x \, p(x)] \Longleftrightarrow \exists x[\neg p(x)]$

II) $\neg[\exists x \, p(x)] \Longleftrightarrow \forall x[\neg p(x)]$

III) $\neg\exists x \, [\neg p(x)] \Longleftrightarrow \forall x \, p(x)$

IV) $\neg\forall x[\neg p(x)] \Longleftrightarrow \exists x \, p(x)$

Ejemplo 15. *Epiménides de Cnosos (siglo V. a. de C.) decía "Todos los cretenses son mentirosos y yo soy cretense, luego miento". Alguien, a la vista de ello, razona como sigue.*

> `Si Epiménides mintió en lo que dijo, entonces los cretenses no eran mentirosos, luego Epiménides, por ser cretense, no mintió en lo que dijo. Se llega pues a una contradicción.`

¿Es el razonamiento anterior correcto?

> `No, ya que la negación de "Todos los cretenses son mentirosos" es que algún cretense no miente, pero no que todos sean no mentirosos.`

Ejemplo 16. *Escribir la negación de la siguiente proposición cuantificada:*

$$\forall x \in A, \exists y \in B, \exists z \in C, \forall t \in B : p(x, y, z, t).$$

Aplicando las reglas anteriores, tenemos:

$$\begin{gathered}
\neg[\forall x \in A, \exists y \in B, \exists z \in C, \forall t \in B : p(x, y, z, t)] \\
\Longleftrightarrow \exists x \in A : \neg[\exists y \in B, \exists z \in C, \forall t \in B : p(x, y, z, t)] \\
\Longleftrightarrow \exists x \in A, \forall y \in B : \neg[\exists z \in C, \forall t \in B : p(x, y, z, t)] \\
\Longleftrightarrow \exists x \in A, \forall y \in B, \forall z \in C : \neg[\forall t \in B : p(x, y, z, t)] \\
\Longleftrightarrow \exists x \in A, \forall y \in B, \forall z \in C, \exists t \in B : \neg p(x, y, z, t)
\end{gathered}$$