Capítulo 2

Conjuntos, Aplicaciones y Relaciones

2.1. Conjuntos

Se partirá, en esta introducción, de la existencia intuitiva de unos entes matemáticos que se denominarán *conjuntos*.

Definición 3. *Un* ***conjunto*** *es una colección de objetos bien definidos y diferenciables entre sí. A los objetos que constituyen un conjunto se les denomina* elementos *del mismo.*

Los conjuntos se designan, habitualmente, por letras latinas mayúsculas: $A, B, \ldots$ y los elementos por letras latinas minúsculas: $a, b, \ldots$; si a es un elemento del conjunto A, se dirá que *a pertenece* al conjunto A, y se escribirá $a \in A$. En caso contrario, se dirá que el elemento *no pertenece* al conjunto y se denotará $a \notin A$.[1]

Al conjunto que carece de elementos se le denomina *conjunto vacío*, y se denota por $\emptyset$ o por $\{\ \}$.

Ejemplos 1. *La proposición "Todos los alumnos que aprobarán Matemáticas en junio" no define adecuadamente un conjunto puesto que, dado un alumno, no se puede afirmar de antemano si aprobará o no en junio.*

Un conjunto puede ser definido por *extensión*, enumerando todos y cada uno de sus elementos, o por *comprensión*, diciendo cuál es la propiedad que los caracteriza.

[1] Un conjunto A está *bien definido* cuando, dado un elemento cualquiera x, es cierta una y sólo una, de las proposiciones $x \in A$ y $x \notin A$.

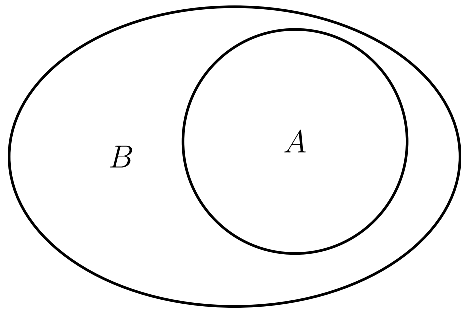


Figura 2.1: Inclusión de Conjuntos, $A \subset B$.

Ejemplos 2. *Algunos conjuntos definidos por* comprensión*:*

- $A = \{x \in \mathbb{Z}\,;\, x^2 \leq 16\}$
- $B = \{x \in \mathbb{N}\,;\, x \text{ divide a } 20\}$
- $\emptyset = \{\ \}$

Ejemplos 3. *Los mismos conjuntos definidos por* extensión*:*

- $A = \{0, 1, 2, 3, 4, -1, -2, -3, -4\}$
- $B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

Como se aprecia en este ejemplo, se utilizan las llaves "{" y "}" para delimitar los elementos que componen un conjunto.

2.1.1. Inclusión

Definición 4. *Dados dos conjuntos A y B, se dice que A es un **subconjunto** de B, y se expresa $A \subseteq B$, cuando todos los elementos de A son también elementos de B, es decir:*

$$\forall x \; [x \in A \Longrightarrow x \in B]$$

se dirá que A está *incluído* o *contenido* en B. Cuando A no está contenido en B, se escribirá $A \nsubseteq B$ (lo cual quiere decir que existe $a \in A$ tal que $a \notin B$).

Cualquier conjunto A, siempre admite como subconjuntos al conjunto vacío $\emptyset$ y a A. Estos se denominan *subconjuntos impropios o triviales*. En otro caso, se dice que B es un subconjunto *propio* de A.

Si $B \subseteq A$ y $B \neq A$, se dice que B está contenido estrictamente en A y se denota $B \subset A$.

En la figura 2.1 se muestra, mediante *Diagramas de Venn*,[2] un conjunto A subconjunto de otro B.

Definición 5. *El conjunto formado por todos los subconjuntos de uno dado A se denomina* ***partes de*** A ***o conjunto potencia****, y se denota $\mathcal{P}(A)$ o 2^A.*

Ejemplos 4. *Se exponen a continuación dos conjuntos sencillos, y sus partes:*
Si $A = \{a, b\} \;\Rightarrow\; \mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\big\}$.
Si $A = \{a, b, c\} \;\Rightarrow\; \mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\big\}$.

Debe quedar claro que si A y B son dos conjuntos cualesquiera, se verifica que

$$B \in \mathcal{P}(A) \;\Leftrightarrow\; B \subseteq A$$

Ejemplo 17. *Las afirmaciones $I), III), IV), V), VIII), IX)$ y $XI)$ son verdaderas.*

I) $\emptyset \subseteq \emptyset$.

II) $\emptyset \in \emptyset$

III) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

IV) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

V) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

VI) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

VII) $\{a, \emptyset\} \subseteq \{a, \{a, \emptyset\}\}$

VIII) $\{a, \emptyset\} \in \{a, \{a, \emptyset\}\}$

IX) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

X) $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$

XI) $\{2\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

XII) $\{2\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

[2]Los Diagramas de Venn fueron introducidos en 1880 por John Venn (1834–1923). Básicamente, se trata de una colección de curvas simples y cerradas, dibujadas en el plano. Son muy útiles para visualizar relaciones entre conjuntos.

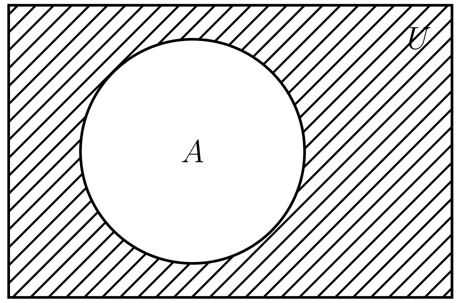


Figura 2.2: Complementario de A respecto a U.

Definición 6. *Un conjunto A es* ***finito*** *si tiene un número finito de elementos; este número se llama* ***cardinal*** *y se denota $|A|$ o $\#A$. En caso contrario, se dice que A es no finito.*

Es fácil comprobar que si A es un conjunto finito, tambien lo es $\mathcal{P}(A)$[3] y, además, $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Definición 7. *Dos conjuntos A y B son* ***iguales*** *si, simultáneamente, se verifica $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, es decir:*

$$A = B \;\Leftrightarrow\; A \subseteq B \;\wedge\; B \subseteq A$$

2.2. Operaciones entre conjuntos

2.2.1. Complementación

Definición 8. *Dado un conjunto U[4] y un subconjunto $A \subseteq U$ se llama* ***complementario*** *del conjunto A, y se denota[5] $\bar{A}$, al subconjunto de U formado por todos los elementos que no pertenecen a A, es decir:*

$$\bar{A} = \{x \in U\,;\, x \notin A\}$$

Obsérvese que la propiedad que determina al complementario de A es la negación de la propiedad que determina a los elementos de A.

[3] Si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ tiene n elementos, a cada uno de sus subconjuntos B le asociamos una cadena c_B de $0's$ y $1's$ de longitud n. Cada cadena binaria tendrá un 1 en la posición i-ésima ($i = 1, \ldots, n$) si, y sólo si, el elemento $a_i \in B$, con lo que el cardinal de $\mathcal{P}(A)$ es el número de cadenas binarias de longitud n, es decir 2^n.

[4] Cuando, en un contexto determinado, se consideran siempre conjuntos que son subconjuntos de uno dado U, a dicho conjunto de referencia U se le denomina **conjunto universal o universo**

[5] Puede usarse tambien la notación A' o $C_U(A)$

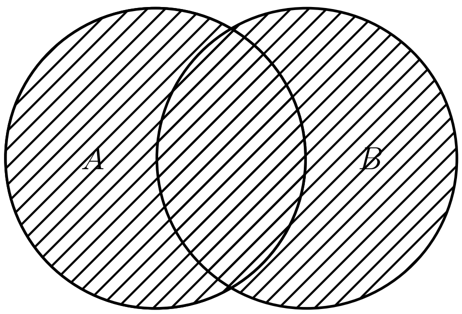


Figura 2.3: Unión de conjuntos: $A \cup B$.

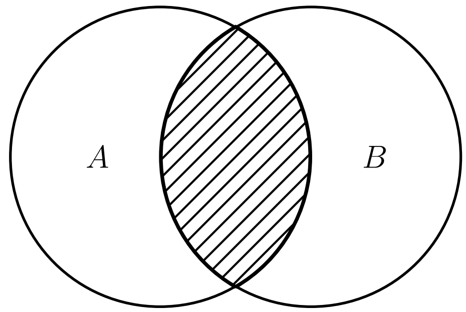


Figura 2.4: Intersección de conjuntos: $A \cap B$.

En la figura 2.2 en la página anterior se muestra, en la zona rayada, el conjunto complementario de A respecto a U.

Propiedades 1. *Dado un conjunto U y dos subconjuntos suyos A y B, se verifican las siguientes propiedades:*

i) $\bar{\emptyset} = U$.

ii) $\bar{U} = \emptyset$.

iii) $\bar{\bar{A}} = A$.

iv) $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; \bar{B} \subseteq \bar{A}$.

2.2.2. Unión

Definición 9. *Dados dos conjuntos A y B se llama **unión** de A y B, y se representa $A \cup B$, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B:*

$$A \cup B = \{x\,;\, x \in A \;\vee\; x \in B\}$$

En la figura 2.3, la zona rayada reprsenta el conjunto $A \cup B$.

Propiedades 2. *Dados los conjuntos A, B y C, subconjuntos de U, la unión de conjuntos verifica las siguientes propiedades:*

i) $A \subseteq (A \cup B)\,, \quad B \subseteq (A \cup B)$.

ii) $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; A \cup B = B$.

iii) $A \subseteq C \;\wedge\; B \subseteq C \;\Leftrightarrow\; (A \cup B) \subseteq C$.

iv) $A \cup A = A$ *(Propiedad Idempotente).*

v) $A \cup B = B \cup A$ *(Propiedad Conmutativa).*

vi) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(Propiedad Asociativa).*

vii) $A \cup U = U$

viii) $A \cup \emptyset = A$.

2.2.3. Intersección

Definición 10. *Dados dos conjuntos A y B se llama* ***intersección*** *de A y B, y se representa $A \cap B$, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a B, es decir:*

$$A \cap B = \{x\,;\, x \in A \;\wedge\; x \in B\}$$

De la definición se sigue que un elemento pertenece a la intersección si pertenece a los dos conjuntos. En la figura 2.4 en la página anterior la zona rayada indica el conjunto intersección $A \cap B$.

Propiedades 3. *Dados tres conjuntos A,B y C, subconjuntos de U, la intersección verifica las siguientes propiedades:*

i) $(A \cap B) \subseteq A, \quad (A \cap B) \subseteq B$.

ii) $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; A \cap B = A$.

iii) $A \subseteq C \;\wedge\; B \subseteq C \;\Rightarrow\; (A \cap B) \subseteq C$.[6]

iv) $C \subseteq A \;\wedge\; C \subseteq B \;\Leftrightarrow\; C \subseteq (A \cap B)$.

v) $A \cap A = A$ *(Propiedad Idempotente).*

vi) $A \cap B = B \cap A$ *(Propiedad Conmutativa).*

vii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(Propiedad Asociativa).*

viii) $A \cap U = A$ *(U es el conjunto universal).*

ix) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Propiedades 4. *Con la notación anterior, la unión y la intersección verifican además las siguientes propiedades conjuntas:*

[6]Nótese que puede suceder que $A \cap B \subseteq C$ y, sin embargo, $A \nsubseteq C$ y $B \nsubseteq C$. Es el caso de $A = \{a, x\}$, $B = \{b, x\}$ y $C = \{x, y\}$.

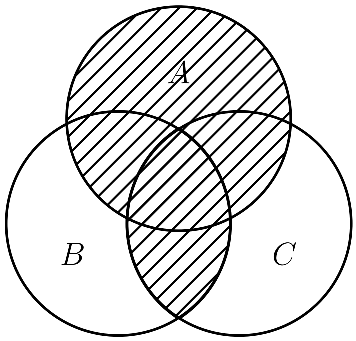


Figura 2.5: $A \cup (B \cap C)$.

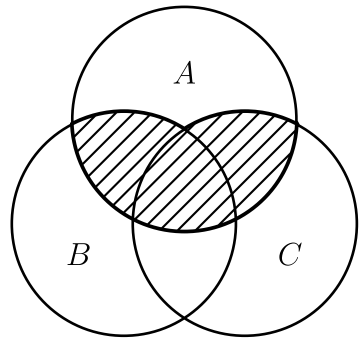


Figura 2.6: $A \cap (B \cup C)$.

i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(Ver figura 2.5).*

ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(Ver figura 2.6).*

iii) $A \cup \bar{A} = U$.

iv) $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

v) $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ *(Primera Ley de De Morgan).*

vi) $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$ *(Segunda Ley de De Morgan).*

Como consecuencia, si $A, B \subseteq U$ son dos subconjuntos de U, se verifica que

$$A = A \cap U = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

Definición 11. *Si dos conjuntos no tienen ningún elemento en común, se dice que son **disjuntos**, es decir:*

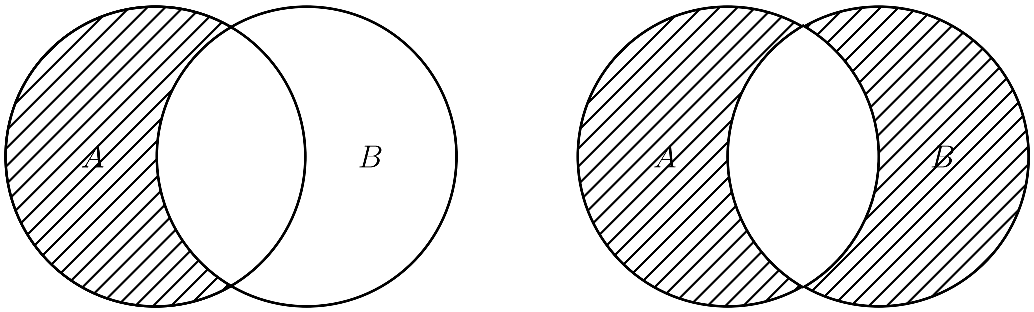
$$A \text{ y } B \text{ son disjuntos} \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = \emptyset$$

2.2.4. Diferencia

Definición 12. *Dados dos conjuntos A y B se llama **diferencia** entre A y B, y se representa $A \backslash B$ o $A - B$, al conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B:*

$$A \backslash B = \{x \in A \,;\, x \notin B\}$$

En la figura 2.7(a) en la página siguiente se muestran dos conjuntos A y B y, representado por el área rayada, el conjunto $A - B$. Se aprecia con



(a) Diferencia: $A\backslash B$. (b) Diferencia simétrica: $A \oplus B$.

Figura 2.7: Diferencia de conjuntos

facilidad que $A\backslash B$ y $B\backslash A$ son, en general, distintos. Por otro lado, es claro que $A\backslash B = A \cap \bar{B}$

Además, se verifica que

$$A\backslash B = A \;\Leftrightarrow\; A \subseteq \bar{B} \;\Leftrightarrow\; A \cap B = \emptyset \;\Leftrightarrow\; B \subseteq \bar{A} \;\Leftrightarrow\; B\backslash A = B$$

Definición 13. *Dados dos conjuntos A y B se llama* ***diferencia simétrica*** *entre A y B, y se representa $A \oplus B$, al conjunto de los elementos que están en uno y, sólo uno de los conjuntos A o B.*

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

En la figura 2.7(b) se muestran dos conjuntos A y B, y en el área rayada, el conjunto diferencia simétrica $A \oplus B$. Es fácil ver que $A \oplus B = B \oplus A$ y, además:

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$$

Tambien se puede comprobar que $A \oplus \emptyset = A$, $A \oplus A = \emptyset$, $A \oplus \bar{A} = U$ y $A \oplus U = \bar{A}$.

2.2.5. Producto Cartesiano

Definición 14. *Dados dos conjuntos A y B, se llama* ***producto cartesiano*** *de A por B, y se denota $A \times B$, al conjunto constituido por* pares ordenados *de elementos, el primero perteneciente al conjunto A y el segundo al B. Esto es:*

$$A \times B = \{(a, b)\, ;\, a \in A \;\wedge\; b \in B\}$$

Ejemplos 5. *El producto cartesiano $A \times B$ de los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$ es el conjunto:*

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

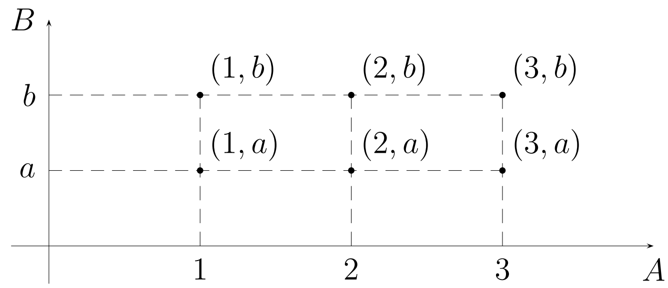


Figura 2.8: Representación gráfica de $A \times B$

Cuando sea posible, es útil representar gráficamente el producto cartesiano por medio de *diagramas de coordenadas cartesianas*. Para ello se toman dos rectas OX y OY, perpendiculares u oblicuas, de forma que el punto O es la intersección de ambas. Este punto recibe el nombre de *origen*, la recta OX es el eje de *abscisas* y la OY es el eje de *ordenadas*. El conjunto A se representa linealmente en OX, y el B en OY. Los elementos (a, b) de $A \times B$ se representan por puntos resultantes de la intersección de la paralela a OY por a con la paralela a OX por b. En la figura 2.8 se muestra la representación en coordenadas cartesianas del ejemplo anterior.

Dos pares ordenados (a, b) y (c, d), elementos del producto cartesiano $A \times B$, son iguales si $a = c$ y $b = d$. Es claro que, en general, $A \times B \neq B \times A$.

Se puede extender la definición de producto cartesiano a n conjuntos.

Definición 15. *Dados n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se define su producto cartesiano como:*

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \; ; \; a_i \in A_i, \; \forall\, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Finalmente, si A y B son conjuntos finitos, tambien lo es $A \times B$ y se tiene que:

$$|A \times B| = |A|.|B|$$

2.3. Aplicaciones

El concepto de aplicación (función) es de gran importancia en Informática. Una función es el modo más natural de implementar la correspondencia entre los datos y el resultado de un proceso de cálculo en un ordenador. Los llamados *lenguajes funcionales* como OCAML, HASKELL, etc., se fundamentan en este concepto y suelen identificar programa y función.

Definición 16. *Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Una* ***aplicación*** *f de A en B es una regla que asocia a* cada *elemento a de A un* único *elemento de B que se denomina* imagen *de a y se denota $f(a)$.*

El conjunto A se llama *conjunto inicial*, y el B *conjunto final*. La relación entre a y b debida a f se suele representar de la forma:

$$\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & B \\ a & \rightsquigarrow & f(a) = b \end{array}$$

Se suele denominar *función*[7] a la correspondencia $f : A \to B$ si A y B son conjuntos numéricos. Con frecuencia, se utiliza la letra x para denotar los elementos del conjunto inicial de f, y la letra y para los elementos del conjunto final.

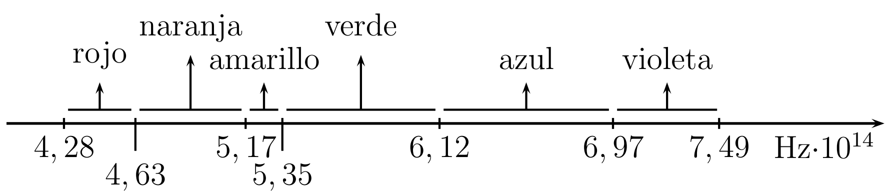


Figura 2.9: Aplicación del espectro visible

Ejemplos 6. I) *Se puede considerar que el arco iris define una aplicación que asocia a cada rango de frecuencias del espectro electromagnético, un color de los que percibimos tal como se muestra en la figura 2.9.*

II) *El horario de un ferrocarril define una aplicación que asocia a cada estación $a, b, c, \ldots$ un número que sirve para expresar la medida del tiempo (8h, 8h30m, 8h57m,...) que invertirá el tren en llegar a cada estación.*

Puesto que a cada estación sólo le puede corresponder una hora de llegada del tren, esta correspondencia entre estaciones y horarios sea efectivamente una aplicación.

III) *Una tabla de seguros de vida es una función que asocia cada edad del solicitante (1 año, 2 años, 3 años, etc.) el importe de las primas que ha de pagar para suscribir tal seguro.*

[7] En el contexto del Análisis Matemático es frecuente utilizar la palabra función para referirse a una correspondencia $f : A \to B$, es decir una regla que asocia a algunos elementos de A un elemento en B. Esos elementos de A que tienen imagen en B forman un subconjunto de A llamado dominio de f y que coincide con A cuando f es una aplicación.

IV) *La regla que permite calcular el perímetro p de una circunferencia multiplicando su diámetro 2r (siendo r el radio) por la constante π, es una función real de variable real, ya que el conjunto inicial es el de los números reales, $\mathbb{R}$, y coincide con el de llegada. Se representa:*

$$p = f(r) = 2\pi r$$

Dos aplicaciones $f : A \to B$ y $g : C \to D$ son *iguales* si $A = C$, $B = D$ y $f(a) = g(a)$, para cualquier elemento a de A.

Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, se denota por B^A al conjunto:

$$B^A = \{f : A \to B\ ;\ f \text{ es una aplicación}\}.$$

Cuando A y B son conjuntos son finitos, también lo es B^A y se verifica que $|B^A| = |B|^{|A|}$.

Definición 17. *Sea $f : A \to B$ una aplicación y sean $A_1 \subseteq A$ y $B_1 \subseteq B$ dos subconjuntos de A y B respectivamente. Definimos la imagen por f del conjunto A_1 como:*

$$f(A_1) := \{f(a)\,;\, a \in A_1\} \subseteq B$$

y la imagen recíproca por f del conjunto B_1 como:

$$f^{-1}(B_1) := \{a \in A\,;\, f(a) \in B_1\} \subseteq A$$

Si tomamos como $A_1 = A$, al conjunto $f(A) = Imf$ le denominamos *conjunto imagen.*

Ejemplos 7. *Sea $f : A = \{1, 2, 3\} \to B = \{x, y, z, t\}$ la aplicación dada por $f(1) = x, f(2) = z, f(3) = z$. Es claro que*

$$f(\{1\}) = \{x\},\ f(\{2\}) = \{z\},\ f(\{3\}) = \{z\}$$

y, por otro lado,

$$f^{-1}(\{x, y\}) = \{1\} \text{ y } f^{-1}(\{y, t\}) = \emptyset.$$

Propiedades 5. *Sea $f : A \to B$ una aplicación y sean $A_1, A_2 \subseteq A$ y $B_1, B_2 \subseteq B$ subconjuntos de A y B respectivamente. Se verifica:*

I) *$f(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ y $f^{-1}(B) = A$*

II) *Si $A_1 \subseteq A_2$, entonces $f(A_1) \subseteq f(A_2)$*

iii) *Si* $B_1 \subseteq B_2$*, entonces* $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$

iv) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

La igualdad no es cierta, en general. Basta tomar $A_1 = \{2\}$ *y* $A_2 = \{3\}$ *en el el ejemplo 7.*

v) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

vi) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

vii) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

viii) $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$

Si tomamos $A_1 = \{2\}$ *en el ejemplo 7 comprobamos que* $\{2\} \subset f^{-1}(f(\{2\}) = f^{-1}(\{z\}) = \{2,3\}$

ix) $f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$

Si tomamos $B_1 = B = \{x,y,z,t\}$ *en el ejemplo 7 comprobamos que* $f(f^{-1}(\{x,y,z,t\}) = f(\{1,2,3\}) = \{x,z\} \subset \{x,y,z,t\}$.

Definición 18. *Sea* $f : A \to B$ *una aplicación y sea* $A_1 \subseteq A$ *un subconjunto de* A*. Llamamos* ***restricción*** *de* f *a* A_1 *y denotamos* $f_{/A_1}$ *a la aplicación* f *restringida al conjunto* A_1*, es decir,* f *definida sólo para los elementos de* A_1.

Definición 19. *Se dice que una aplicación* $f : A \to B$ *entre* A *y* B *es:*

i) ***inyectiva*** *si dos elementos distintos de* A *tienen diferente imagen en* B*, esto es:*

$$\forall\, a_1, a_2 \in A \quad [f(a_1) = f(a_2) \Longleftrightarrow a_1 = a_2]$$

ii) ***sobreyectiva****,* ***suprayectiva*** *o* ***exhaustiva*** *si todo elemento de* B *es imagen, al menos, de un elemento de* A*, es decir:*

$$\forall b \in B,\ \exists\, a \in A \quad [f\,(a) = b]$$

iii) ***biyectiva*** *o* ***biunívoca*** *si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.*

Es interesante destacar que si los conjuntos A y B son finitos y $f : A \to B$ es una aplicación entre ellos, se verifica que:

- Si f es inyectiva[8], entonces $|A| \leq |B|$
- Si f es sobreyectiva, entonces $|A| \geq |B|$
- Si f es biyectiva[9], entonces $|A| = |B|$

Ejemplos 8. *Una empresa proporciona a sus 513 empleados un código que consta de nueve cifras entre 0 y 9, por ejemplo 23/130/0467. Dos códigos son "coincidentes en ceros", si, en cada posición uno tiene un cero si, y sólo si, lo tiene el otro. Así, los códigos 20/560/0503 y 10/730/0804 son coincidentes en ceros. Demuestra que al menos dos empleados tendrán códigos de usuario coincidentes en ceros.*[10]

Además, se verifica también el siguiente resultado que será de utilidad en la práctica:

Proposición 1. *Si A y B son dos conjuntos finitos con el mismo cardinal y $f : A \to B$ es una aplicación entre ellos, son equivalentes:*

- *f es inyectiva*
- *f es sobreyectiva*
- *f es biyectiva*

Demostración. Si $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, entonces $f(A) = \{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$ y, al ser f inyectiva, $|f(A)| = |A| = |B|$. Puesto que $f(A) \subseteq B$ y tienen el mismo cardinal, es obvio que $f(A) = B$, es decir f es sobreyectiva. Recíprocamente, si f es sobreyectiva y $f(a_1) = f(a_2)$ con $a_1 \neq a_2$, entonces $|f(A)| < |A| = |B|$, lo que contradice la sobreyectividad de f. $\square$

Definición 20. *Dados tres conjuntos A, B y C, y dos aplicaciones f y g tales que*

$$\begin{array}{rl} f: A \longrightarrow & B \\ a \longrightarrow & f(a) = b \end{array} \qquad \begin{array}{rl} g: B \longrightarrow & C \\ b \longrightarrow & g(b) = c \end{array}$$

[8] Este principio se conoce como Principio de Palomar. Es claro que si tenemos un conjunto de n palomas y otro conjunto de m nidos, con $n > m$, y definimos una aplicación entre ellos que consiste en enviar cada paloma a su nido, al menos dos palomas comparten un nido, es decir la aplicación no es inyectiva.

[9] Conviene destacar que, si bien no todas las aplicaciones que se pueden definir entre conjuntos con el mismo cardinal son biyectivas, siempre es posible encontrar una aplicación biyectiva entre ellos.

[10] A cada empleado (paloma) le hacemos corresponder el subconjunto de $\{1, 2, \dots, 9\}$ (nido) correspondiente a las posiciones en las que su código tiene un cero. Como hay más palomas que nidos (el número de subconjuntos posibles es $2^9 = 512$), dos palomas al menos comparten el nido.

*se llama **composición de** f **con** g a la aplicación*

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\longrightarrow C \\ a &\longrightarrow (g \circ f)(a) = g[f(a)] = g(b) = c \end{aligned}$$

Ejemplos 9. *Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sean $f, g : A \to A$ las aplicaciones definidas por $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = f(5) = 1$ y $g(1) = 5, g(2) = 4, g(3) = 3, g(4) = 2$ y $g(5) = 1$. Es evidente que $(g \circ f)(a) = 5$ y $(f \circ g)(a) = 1$, para todo $a \in A$. Por lo tanto, $g \circ f \neq f \circ g$.*

La composición de aplicaciones tiene la propiedad *asociativa*, es decir, dadas tres aplicaciones $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ y $h : C \longrightarrow D$:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Proposición 2. *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos aplicaciones cualesquiera. Se verifica que:*

- *Si f y g son inyectivas, también lo es $g \circ f$*
- *Si f y g son sobreyectivas, también lo es $g \circ f$*
- *Si f y g son biyectivas, también lo es $g \circ f$*

Demostración. Si f y g son inyectivas y a_1, a_2 son dos elementos de A tales que $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$, entonces $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ (por definición de composición). Puesto que g es inyectiva, se verifica que $f(a_1) = f(a_2)$ y, la inyectividad de f permite concluir que $a_1 = a_2$.

La demostración de las otras dos afirmaciones es un sencillo ejercicio. □

Definición 21. *Se llama aplicación **identidad** a una aplicación I_A entre A y A de la forma:*

$$\begin{aligned} I_A : A &\longrightarrow A \\ a &\longrightarrow I_A(a) = a \end{aligned}$$

Definición 22. *Sea $f : A \to B$ una aplicación. Se llama **aplicación inversa** de f, y se denota por f^{-1} a una aplicación $f^{-1} : B \to A$ tal que, si b es un elemento de B*

$$f^{-1}(b) = a \Longleftrightarrow b = f(a)$$

Se puede comprobar que $f \circ f^{-1} = I_B$, $f^{-1} \circ f = I_A$, $f \circ I_A = f$ y $I_B \circ f = f$. En consecuencia, si existe la inversa de f, ésta es única.

Proposición 3. *Dada una aplicación $f : A \to B$, f admite inversa si, y sólo si, f es biyectiva. Además,*

- *Si f es inversible, su inversa f^{-1} también lo es y $(f^{-1})^{-1} = f$*
- *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son dos aplicaciones inversibles, entonces $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$*

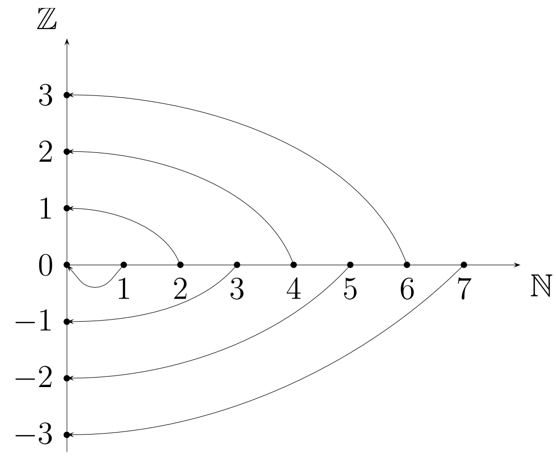


Figura 2.10: Representación gráfica de la aplicación $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

2.3.1. Conjuntos numerables

Decimos que un conjunto A es **numerable** si es finito o existe una biyección entre A y $\mathbb{N}$. Se comprende fácilmente que si A es finito y $n = |A|$, existe una biyección entre el conjunto A y $\{1, \ldots, n\}$.

Son numerables los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ ya que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \gamma : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longrightarrow & \gamma(n) = \begin{cases} n/2 & , \quad \text{si } n \text{ es par} \\ -(n-1)/2 & , \quad \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \end{array}$$

es biyectiva.

En la siguiente figura se muestra un diagrama en el que se aprecia el funcionamiento de esta aplicación. Los naturales pares son asignados a los enteros positivos, y los naturales impares a los enteros negativos. Es evidente, a la vista de la figura, que esta aplicación no tiene por qué ser única.

Tambien es cierto que el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es numerable. No son numerables ni $\mathbb{R}$ ni $\mathbb{C}$.

2.4. Relaciones

Definición 23. *Dados dos conjuntos A y B, una* ***relación binaria***[11] *de A en B es un subconjunto cualquiera $\mathcal{R}$ del producto cartesiano $A \times B$.*

Si el par ordenado (a, b) pertenece a $\mathcal{R}$, se dirá que a está relacionado *con b, y se denotará $a\mathcal{R}b$.*

[11] En general si tenemos n conjuntos, A_i con $i = 1, \ldots, n$, se dice que un subconjunto $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$ es una relacion n-aria sobre $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

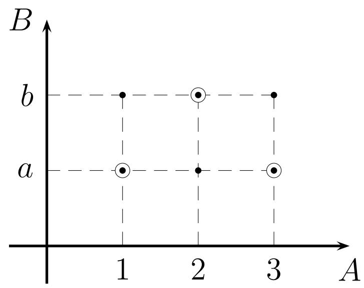


Figura 2.11: Representación gráfica de $\mathcal{R} \subset A \times B$

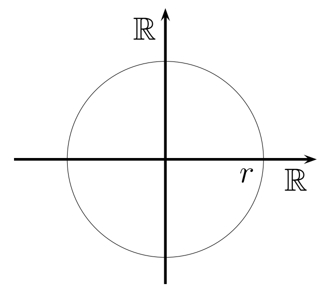


Figura 2.12: Representación gráfica de $\mathcal{C} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Ejemplos 10. I) *Para los conjuntos A y B del ejemplo 5, se tiene que*

$$A \times B = \{(1,a)\,,(1,b)\,,(2,a)\,,(2,b)\,,(3,a)\,,(3,b)\}.$$

Una posible relación sería $\mathcal{R} = \{(1,a)\,,(2,b)\,,(3,a)\}$.

En la figura 2.11 se muestran, mediante puntos, los elementos de $A \times B$, y mediante círculos los de $\mathcal{R}$.

II) *Para el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, serán $A = B = \mathbb{R}$. Una posible relación podría ser $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,;\, x^2 + y^2 = r^2\}$, siendo r un número real positivo.*

En la figura 2.12 se muestran los conjuntos A y B (los ejes cartesianos), y toda la superficie del papel, en la que se encuentran los ejes, que constituye el producto cartesiano $A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Los elementos de la relación $\mathcal{C}$ serán los puntos de ese plano que verifiquen la ecuación que la caracteriza. En la figura, esos puntos se encuentran sobre la línea fina que, como se aprecia, forma una circunferencia de radio r.

III) *El estado de una partida de un juego de barcos se determina, habitualmente, en un tablero cuadrado de 100 casillas, ordenadas en 10 filas y 10 columnas numeradas respectivamente del* 1 *al* 10 *y de la A a la J, tal como se muestra en la figura 2.13 en la página siguiente. Si llamamos X al conjunto de las filas del tablero e Y al de las columnas, las casillas del tablero serán pares ordenados de la forma $(x,y) \in X \times Y$. La situación de la flota de barcos en el tablero bien puede considerarse una relación $\mathcal{F} \subset X \times Y$. En concreto, los barcos que se muestran en el tablero de la figura 2.14 en la página siguiente constituyen la relación:*

$$\mathcal{F} = \{(B,2)\,,(B,3)\,,(B,4)\,,(E,8)\,,(F,8)\,,(G,8)\,,(H,3)\,,(H,4)\,,(H,5)\}$$

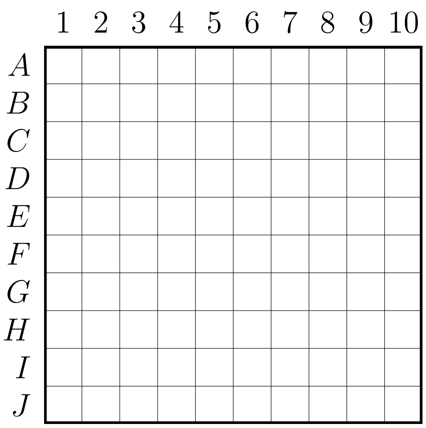


Figura 2.13: Tablero de una partida de barcos: $X \times Y$.

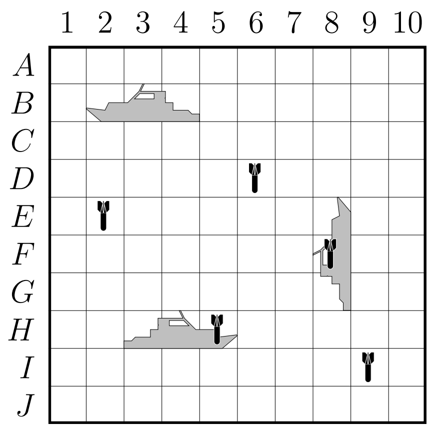


Figura 2.14: Flota de barcos ($\mathcal{F}$) y torpedos disparados ($\mathcal{T}$) en un tablero de barcos ($X \times Y$).

Por otra parte, los sucesivos intentos de hundir la flota, indicados en la figura 2.14 mediante torpedos, constituyen otra relación $\mathcal{T}$ de la forma:

$$\mathcal{T} = \{(D,6)\,,(E,2)\,,(F,8)\,,(H,5)\,,(I,9)\}$$

Los impactos que los torpedos han producido en los barcos, serán la relación intersección entre ambas: $\mathcal{I} = \mathcal{F} \cap \mathcal{T} = \{(F,8),(H,5)\}$.

Definición 24. *Dado un conjunto A, se llama **relación binaria** en A a cualquier subconjunto $\mathcal{R}$ de $A \times A$.*[12]

La relación binaria es, por tanto, un caso particular de relación en el que coinciden el conjunto inicial y el final.

Si el conjunto A es finito, se puede representar una relación binaria en A con un grafo dirigido. Para ello, se dibujan tantos puntos como elementos tenga A y una flecha de a a b si $(a,b) \in \mathcal{R}$ o, lo que es lo mismo, si $a\mathcal{R}b$.

2.4.1. Propiedades de una relación binaria

Sea A un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación binaria en A, Se dice que $\mathcal{R}$ es

I) **Reflexiva** si

$$\forall a \in A \quad a\mathcal{R}a$$

II) **Simétrica** si

$$\forall a_1, a_2 \in A \quad [a_1\mathcal{R}a_2 \Longleftrightarrow a_2\mathcal{R}a_1]$$

[12]Si A es finito, el número de relaciones binarias en A es $2^{|A|^2}$.

iii) **Antisimétrica** si

$$\forall a_1, a_2 \in A \quad [(a_1 \mathcal{R} a_2) \wedge (a_2 \mathcal{R} a_1) \Longrightarrow a_1 = a_2]$$

iv) **Transitiva** si

$$\forall a_1, a_2, a_3 \in A \quad [(a_1 \mathcal{R} a_2) \wedge (a_2 \mathcal{R} a_3) \Longrightarrow a_1 \mathcal{R} a_3]$$

Ejemplos 11. i) *Dado cualquier conjunto A, la relación ($\subseteq$)"estar contenido en" definida en $\mathcal{P}(A)$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.*

ii) *Si $A = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, la relación ($\leq$) "ser menor o igual que" es tambien reflexiva, antisimétrica y transitiva.*

iii) *Dados dos números enteros a y b, se dice que a* divide a *b y se denota $a|b$, si existe un número entero m tal que $b = am$. Es fácil comprobar que es reflexiva y transitiva. Cuando la restringimos a un subconjunto A de números enteros del mismo signo (es decir $A \subseteq \mathbb{Z}^+$ o $A \subseteq \mathbb{Z}^-$), verifica, además la propiedad antisimétrica.*

2.4.2. Relación de Equivalencia

Definición 25. *Una **relación de equivalencia** en un conjunto A es una relación binaria $\mathcal{R}$ que satisface las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.*

En adelante, utilizaremos el símbolo $\sim$ para referirnos a una relación de equivalencia.

Ejemplos 12. *En $\mathbb{Z}$, la relación:*

$$a \equiv_2 b \Longleftrightarrow a - b \textit{ es un múltiplo de } 2$$

es una relación de equivalencia. Esta relación se puede extender, considerando cualquier entero positivo m y definiendo:

$$a \equiv_m b \Longleftrightarrow a - b \textit{ es un múltiplo de } m$$

Las relaciones de equivalencia permiten agrupar elementos relacionados entre sí en subconjuntos llamados **clases de equivalencia**:

Definición 26. *Dado un conjunto A dotado de una relación de equivalencia $\sim$, se llama **clase de equivalencia** del elemento $a \in A$, y se denota por $[a]$ al conjunto de los elementos de A que están relacionados con a mediante $\sim$, es decir:*

$$[a] = \{x \in A\,;\, x \sim a\}$$

La relación de equivalencia del ejemplo que hemos visto antes divide a los elementos del conjunto $\mathbb{Z}$ en dos clases de equivalencia, una formada por los números pares, y la otra por los impares. Cuando la relación es $\equiv_m$, tenemos m clases de equivalencia [13] $[0], [1], \ldots, [m-1]$.

Propiedades 6. *Las clases de equivalencia verifican las siguientes propiedades:*

I) *Dos elementos a_1 y a_2 están relacionados entre sí ($a_1 \sim a_2$) si, y sólo si, determinan la misma clase de equivalencia ($[a_1] = [a_2]$)*[14].

Demostración. Si $a_1 \sim a_2$ y $a \in [a_1]$, entonces $a \sim a_1$ y $a_1 \sim a_2$, nos permiten deducir que $a \sim a_2$, es decir $a \in [a_2]$.

Recíprocamente, si las clases coinciden, entonces $a_1 \in [a_1] = [a_2]$, es decir $a_1 \sim a_2$. □

II) *Dos elementos a_1 y a_2 no están relacionados si, y sólo si, $[a_1] \cap [a_2] = \emptyset$.*

Demostración. Si $a_1 \not\sim a_2$ y $a \in [a_1] \cap [a_2]$, entonces $a_1 \sim a$ y $a \sim a_2$, así que $a_1 \sim a_2$, lo que contradice la hipótesis de partida. El recíproco es análogo. □

Definición 27. *A una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos no vacíos de A que verifica:*

- $A = \displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$, *para todo* $i \neq j$

*se le llama **partición** de A.*

Es fácil comprobar que una partición define una relación de equivalencia[15] y viceversa.

Definición 28. *Dada una relación de equivalencia $\sim$ definida en un conjunto A, se llama **conjunto cociente** de A respecto a $\sim$, y se denota $A/\sim$, al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia determinadas en A por $\sim$. En el ejemplo que estamos manejando, el conjunto cociente $\mathbb{Z}/\equiv_m$ tiene m elementos. Este conjunto se denota $\mathbb{Z}_m$ y se llama conjunto de restos módulo m.*

[13] Un número entero x pertenece a la clase de equivalencia $[r]$, con $0 \leq r \leq m-1$, si r es el resto de la división de x entre m.

[14] Teniendo esto en cuenta, una clase de equivalencia puede representarse por cualquiera de sus elementos.

[15] Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una partición de A y $a, b \in A$, se dice que $a \sim b$ si, y sólo si, existe $i \in I$ tal que $a, b \in A_i$.

2.4.3. Relación de orden

Definición 29. *Si $\preccurlyeq$ es una relación binaria en A reflexiva, antisimétrica y transitiva, se dice que es una* ***relación de orden****. Si $a \preccurlyeq b$ se dice que a es* ***anterior*** *a b o* ***menor o igual que***[16] *b.*

Una relación de orden $\preccurlyeq$ en un conjunto A es **de orden total** si dados dos elementos cualesquiera a, b de A, siempre se pueden comparar, es decir $a \preccurlyeq b$ o $b \preccurlyeq a$. Un ejemplo de relación de orden total es la relación $\leq$ en $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, mientras que las relaciones " $\subseteq$ " y "divide a" definidas anteriormente no son de orden total.

Definición 30. *Un* ***poset*** *$(A, \preccurlyeq)$ es un conjunto A y una relación de orden $\preccurlyeq$ definida en él.*

Ejemplos 13. i) *Son ejemplos de posets $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ y $(\mathbb{N}, |)$.*

ii) *Sea $(L, \leq)$ un alfabeto, es decir un conjunto finito totalmente ordenado y sea L^* el conjunto de palabras que se pueden formar con los elementos de L. El orden de L se puede extender a L^* siendo la relación de orden resultante de orden total y llamada* orden lexicográfico *por ser el orden del diccionario. Así, las palabras $l_1 l_2 \dots l_p$ y $l'_1 l'_2 \dots l'_q$ están relacionadas y verifican que $l_1 l_2 \dots l_p \leq l'_1 l'_2 \dots l'_q$, si ocurre:*

- *para algún $k < p$, se tiene que $l_i = l'_i$ (con $i = 1, \dots k$), $l_{k+1} \leq l'_{k+1}$ y $l_{k+1} \neq l'_{k+1}$ (por ejemplo casa y caso)*
- *$p \leq q$ y $l_i = l'_i$, para $i = 1 \dots p$ (por ejemplo casa y casas).*

Cuando $(A, \preccurlyeq)$ es un poset finito, se puede representar con un diagrama de Hasse que consiste en un conjunto de vértices (denotando los elementos de A) y una serie de aristas (sin flecha). Dibujaremos una arista ascendente de x a y si y *cubre* a x, es decir, $x \leq y$ y no hay "elementos intermedios" entre ambos, es decir, si $z \in A$ es tal que $x \leq z \leq y$, entonces $z = x$ o $z = y$.

Definición 31. *Dos posets $(A, \preccurlyeq)$ y $(B, \leq)$ son* ***isomorfos*** *si existe una aplicación biyectiva $f : A \to B$, de modo que:*

$$a \preccurlyeq a' \iff f(a) \leq f(a').$$

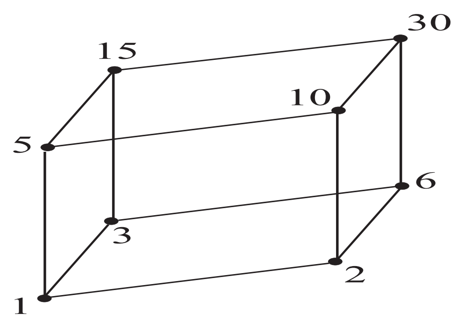
Ejemplos 14. *Los posets $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$, $(D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}, |)$*[17] *y $(\{0, 1\}^3, R)$ son isomorfos* [18].

---

[16] De la relación de orden nace, por ejemplo, el ordenamiento de los números reales. No es de extrañar el parecido entre el símbolo "$\preccurlyeq$" y el símbolo "$\leq$" (o, a veces, "$\leqslant$") utilizado para ordenar de menor a mayor los números reales.

[17] D_m denota el conjunto de divisores positivos de m.

[18] R es la relación dada por $(a, b, c) \leq (a', b', c') \;\Leftrightarrow\; (a \leq a') \;\wedge\; (b \leq b') \;\wedge\; (c \leq c')$



D_{30}

2.4.4. Elementos distinguidos en un poset

Sea $(P, \leq)$ un poset.

Definición 32. *Un elemento $m \in P$ es un **maximal** si*[19]

$$\neg\exists p \in P \quad [(m \leq p) \wedge (m \neq p)],$$

es decir, no hay elementos en P "estrictamente mayores" que m.

Definición 33. *Un elemento $n \in P$ es un **minimal** si*[20]

$$\neg\exists p \in P \quad [(p \leq n) \wedge (n \neq p)],$$

es decir, no hay elementos en P "estrictamente menores" que n.

Un poset puede tener varios maximales y varios minimales y, si es finito, tiene al menos un maximal y al menos un minimal.

Definición 34. *Un elemento $M \in P$ es **máximo de** P si $p \leq M$, para todo $p \in P$.*

Definición 35. *Un elemento $m \in P$ es **mínimo de** P si $m \leq p$, para todo $p \in P$.*

Proposición 4. *Se verifican los siguientes enunciados:*

i) *El máximo, si existe, es único.*

ii) *El mínimo, si existe, es único.*

iii) *Si P es finito, P tiene máximo, si y, sólo si, tiene un un único maximal.*

iv) *Si P es finito, P tiene mínimo, si y, sólo si, tiene un un único minimal.*

[19] Equivalentemente, $\forall p \in P \quad [(m \leq p) \rightarrow (m = p)]$.
[20] Equivalentemente, $\forall p \in P \quad [(p \leq n) \rightarrow (n = p)]$.

Sea ahora $Q \subseteq P$ un subconjunto de P.

Definición 36. *Un elemento $a \in P$ es una **cota superior de** Q **en** P si $q \leq a$, para cualquier $q \in Q$.*

Definición 37. *Un elemento $b \in P$ es una **cota inferior de** Q **en** P si $b \leq q$, para cualquier $q \in Q$.*

Definición 38. *Un elemento $a \in P$ es **supremo de** Q si*

- *a es una cota superior de Q en P, es decir, $q \leq a$, para todo $q \in Q$.*
- *Si b es otra cota superior de Q en P, necesariamente $a \leq b$.*

Queda claro que, si el conjunto de cotas superiores de Q en P es no vacío, entonces el supremo es el mínimo de dicho conjunto.

Definición 39. *Un elemento $c \in P$ es **ínfimo de** Q si*

- *c es una cota inferior de Q en P, es decir, $c \leq q$, para todo $q \in Q$.*
- *Si d es otra cota inferior de Q en P, necesariamente $d \leq c$.*

Igual que ocurre con el supremo, si el conjunto de cotas inferiores de Q en P es no vacío, entonces el ínfimo es el máximo de dicho conjunto.

Proposición 5. *Se verifican los siguientes enunciados:*

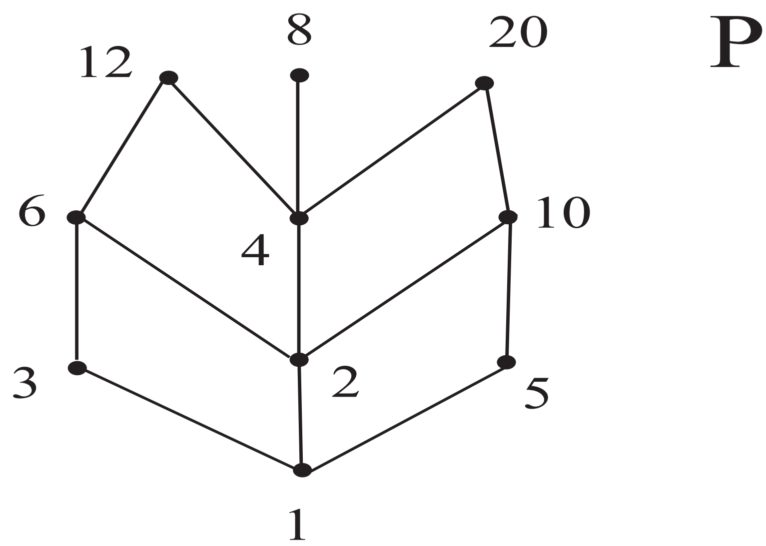
i) *El supremo de Q, si existe, es único.*

ii) *El ínfimo de Q, si existe, es único.*

iii) *Existe el máximo de Q si, y sólo si, existe el supremo y éste es un elemento de Q.*

iv) *Existe el mínimo de Q si, y sólo si, existe el ínfimo y éste es un elemento de Q.*

Ejemplos 15. *En el conjunto $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20\}$, se considera la relación de orden parcial de divisibilidad y el subconjunto $Q = \{1, 2, 4, 10\}$. Es fácil ver que Q no tiene máximo porque tiene dos maximales (4 y 10). El supremo de Q en P es 20. Por otro lado, el único minimal 1 es mínimo e ínfimo. Por su parte, P tiene tres maximales (8, 12 y 20), no tiene máximo y su mínimo es 1.*


12
8
20
6
4
10
3
2
5
1
P