Capítulo 4

Combinatoria

4.1. Técnicas básicas

Proposición 6. (Principio de la suma) Sean $\{A_i\ ;\ i = 1, \ldots, n\}$ conjuntos finitos con $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$. Entonces:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Demostración. Inducción en n. □

Ejemplo 43. *Se quiere elegir un representante de* 1° *de la Facultad para ir a la Olimpiada de Informática. ¿Cuántas posibilidades hay para elegir si en cada grupo de Ingeniería hay 60 alumnos y en cada grupo de las Técnicas hay 100 alumnos? (hay dos grupos en la Ingeniería y cuatro en las Técnicas).*

*En total, tenemos 2*60+4*100=120+400=520 alumnos para escoger.*

Proposición 7. (Principio del producto) Sean $\{A_i\ ;\ i = 1, \ldots, n\}$ conjuntos finitos. Entonces:

$$\left| \prod_{i=1}^{n} A_i \right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

Demostración. Inducción en n. □

Ejemplo 44. *Se quiere diseñar un código para cada alumno de la Facultad utilizando dos letras (las 26 del alfabeto, sin la ñ) y cuatro cifras (del 0 al 9). Si se pueden repetir las letras pero no las cifras, ¿cuántos códigos diferentes se pueden hacer?*

*Podremos formar 26*26*10*9*8*7=676*5040=3.407.040 códigos distintos.*

Siguiendo con el ejemplo anterior, ¿cuántos códigos podremos formar si permitimos que haya códigos sin letras (es decir sólo con cifras), códigos con una sola letra y cuatro cifras y códigos con dos letras y cuatro cifras? (igual que antes, permitimos que se repitan las letras pero no las cifras)

Hay 5040 códigos sin letras, 26*5040 = 131.040 códigos con una sola letra y 3.407.040 códigos con dos letras y cuatro números. En total tenemos, 5040+131.040+3.407.040 = 3.543.120 posibles combinaciones.

Proposición 8. (Principio de distribución, del palomar[1] o del cajón de Dirichlet) Sean m, n y p tres números naturales. Si se desean colocar $np + m$ objetos en n cajas, alguna caja debe contener al menos $p + 1$ objetos.

Demostración. Si cada caja contiene como mucho p objetos, el número total de objetos que podemos colocar es $np < np + 1 \leq np + m$. □

Ejemplo 45. *Una reunión está formado por n matrimonios. ¿Cuántas personas tiene que tener un grupo para poder asegurar que hay al menos un matrimonio entre ellos?*

Ejemplo 46. *Si la media aritmética de $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ números naturales es estrictamente mayor que p, uno de los números es mayor que p.*

Ejemplo 47. *Si se escogen seis números cualesquiera del 1 al 10, por lo menos dos de estos números suman 11.*

Consideremos las cinco "cajas" $\{1, 10\}$, $\{2, 9\}$, $\{3, 8\}$, $\{4, 7\}$ y $\{5, 6\}$. Asociemos a cada número la caja que lo contiene. Puesto que hay cinco cajas y seis números, habrá dos números en la misma caja, lo cual implica que suman 11.

Ejemplo 48. *Demuestra que, dado cualquier conjunto de siete enteros distintos, hay al menos dos de ellos cuya suma o diferencia es un múltiplo de 10.*

Consideremos las "cajas" $\{1, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 7\}$, $\{4, 6\}$, $\{0\}$ y $\{5\}$. Asociemos a cada número la caja que contiene a su cifra de las unidades. Puesto que hay seis cajas y siete números, habrá dos números en la misma caja. Si la caja es la última o la penúltima, su suma y su diferencia es un múltiplo de 10. Si es una de las otras, y los dos números tienen la misma cifra de las unidades, su diferencia es un múltiplo de 10, mientras que si la cifra de las unidades es diferente, su suma será un múltiplo de 10.

[1] En su versión más simple, este principio dice que no puede existir una aplicación inyectiva entre un conjunto de m elementos y otro de n elementos, si $m > n$. Equivalentemente, si se desean colocar m objetos en n cajas, con $m > n$, al menos una caja debe contener 2 objetos

Ejemplo 49. *Tenemos que pintar 64 bicicletas con 7 colores distintos. Demuestra que hemos de pintar al menos 10 del mismo color.*

Aplicaremos el principio de distribución con $n = 7$ (colores), $p = 7$ y $m = 1$, ya que hay 7.9+1 = 64 objetos.

4.2. Permutaciones, Variaciones y Combinaciones

Contaremos las diferentes colecciones que se pueden formar, según una ley dada (repitiendo o no los elementos, teniendo en cuenta o no el orden), con los elementos de un conjunto finito.

4.2.1. Permutaciones

Sea A un conjunto finito. Una *permutación* de A es una biyección de A en A. Si A tiene n elementos y $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, el conjunto de permutaciones de A se representa como S_A. La composición de dos permutaciones de A, s_1 y s_2 es otra permutación de A.

Proposición 9. *El cardinal de S_A es $n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$.*

Demostración. Para elegir la imagen de a_1 tenemos n posibilidades (todas), para la de a_2 tenemos $n-1$ elementos para escoger (todos menos el que hemos tomado como imagen de a_1). El principio del producto garantiza el resultado. □

Ejemplo 50. *Con las letras de "COMPUTER", ¿cuántas palabras se pueden formar?*

Ejemplo 51. *Una isometría en el plano $\mathbb{R}^2$ es una biyección S de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, que conserva las distancias. Por ejemplo, las del triángulo son tres giros (de $60°$, $120°$ y $180°$ grados) y tres reflexiones en tres ejes.*

4.2.2. Variaciones

Sea A un conjunto de n elementos y sea $r \leq n$ un número natural.

Definición 48. *Una* variación de orden *r de los elementos de A es una selección* **ordenada de r elementos distintos de A.**

Dos variaciones son distintas si se diferencian en algún elemento o en la posición de alguno de estos en la variación. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ son variaciones de orden tres diferentes 123 y 124, pero también 123 y 321.

Nota 12. *Cualquier variación de orden r de los elementos de A es una aplicación inyectiva de $\{1, 2, \cdots, r\}$ en A. Si $r = n$, una variación es simplemente una permutación.*

Teorema 20. *El número de variaciones de orden r de n elementos es $V(n, r) = V_n^r = V_{n,r} = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$.*

Ejemplo 52. *El consejo directivo de una empresa farmacéutica tiene 10 miembros de los cuales tres son médicos. Se va a elegir presidente, vicepresidente, secretario y tesorero del consejo.*

i) *¿De cuántas formas se pueden elegir si se quiere que lo presida un médico?*

ii) *Idem si queremos que haya exactamente un médico entre los elegidos.*

iii) *Idem si se quiere que haya al menos un médico entre los cuatro.*

i) *Para presidente tenemos 3 candidatos. Para los otros tres puestos, podemos elegir a cualquiera que no sea el presidente (son 9), así que, en total, tenemos*

$$3 * V(9, 3) = 3 * 9 * 8 * 7 = 1512$$

posibilidades.

ii) *Supongamos que el médico es el presidente. Tenemos 3 candidatos para ese puesto. Para los otros tres puestos hay 7 candidatos (todos los miembros del consejo que no son médicos), lo que nos da un total de*

$$3 * V(7, 3) = 3 * 7 * 6 * 5 = 630$$

comisiones presididas por un médico. Para los otros tres puestos el razonamiento es similar, así que la respuesta es $4 * 630 = 2520$.

iii) *Restaremos a las posibilidades totales ($V(10, 4) = 10 * 9 * 8 * 7 = 5040$) las posibilidades que tenemos de elegir los cuatro puestos sin ningún médico que serán $V(7, 4) = 7 * 6 * 5 * 4 = 840$. Nos quedan pués $5040 - 840 = 4200$ formas de elegir los candidatos garantizando que al menos uno de ellos es un médico.*

4.2.3. Variaciones con repetición

Sea A un conjunto de n elementos y sea r un número natural.

Definición 49. *Una* variación con repetición de orden *r de los elementos de A es una selección* **ordenada de r elementos de A.**

Dos variaciones son distintas si se diferencian en algún elemento, en la posición de alguno de estos en la variación o en el número de veces que se repite un elemento. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ son variaciones de orden tres diferentes 123 y 124, 123 y 321,122 y 112 y 122 y 212.

Nota 13. *Cualquier variación de orden r de los elementos de A es una aplicación de $\{1, 2, \cdots, r\}$ en A.*

Teorema 21. *El número de variaciones con repetición de orden r de n elementos es $VR(n, r) = VR_n^r = VR_{n,r} = n^r$.*

Demostración. Es trivial sin más que, al poder repetir los elementos, en cada una de las elecciones tenemos disponibles los n elementos, por lo que el principio del producto garantiza el resultado. □

Ejemplo 53. *En una cafetería nos dicen que cada bocadillo puede estar formado por los siguientes ingredientes: jamón, chorizo, queso, tomate, lechuga, mayonesa y espárragos, ¿cuántos bocadillos distintos podemos elegir?*

Para cada ingrediente tenemos dos posibilidades, escogerlo (1) o no (0). Como hay siete ingredientes, tenemos, en total $2^7 = 128$ posibles bocadillos.

Ejemplo 54. *¿De cuántas maneras se pueden distribuir 8 bolas diferentes en cinco cajas de distinto color?*

Se trata de contar el número de aplicaciones del conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$ en el conjunto $\{1, 2, \ldots, 5\}$ que es $VR_5^8 = 5^8 = 390625$.

4.2.4. Combinaciones

Supongamos que entre cuatro alumnos A, B, C y D, queremos elegir una comisión de tres para asistir a una reunión. Está claro que la comisión ABC es la misma que BCA, ¿Cuántas se pueden formar? Sea A un conjunto de n elementos y sea $r \leq n$ un número natural.

Definición 50. *Una* combinación de orden *r de los elementos de A es un subconjunto (selección* **no ordenada) de r elementos de A.**

Teorema 22. *El número de combinaciones de orden $r \leq n$ de n elementos es*

$$C(n,r) = C_n^r = C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

Demostración. Sabemos que podemos formar $\frac{n!}{(n-r)!}$ colecciones de r elementos distintos con los n elementos de A. Pero, por cada una de ellas, todas las que resultan de permutar sus r elementos (y son $r!$) son iguales (como combinaciones), de donde se deduce el resultado. □

Corolario 11.

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r},$$

para todo $1 \leq r \leq n$.

Ejemplo 55. *Un estudiante debe realizar un examen de MD con diez preguntas de las que debe contestar siete. ¿Cuántos tipos diferentes de examen puede corregir el profesor? Si debe contestar tres de entre las cinco primeras y cuatro de entre las 5 últimas, ¿cuántos tipos posibles de examen hay en este caso? Lo mismo si en las especificaciones previas se dice que debe contestar al menos tres de entre las cinco primeras preguntas.*

En el primer caso son $\binom{10}{7} = 120$, en el segundo $\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{4} = 10 * 5 = 50$ y, en el tercero, $\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{4} + \binom{5}{4} \cdot \binom{5}{3} + \binom{5}{2} = 50 + 50 + 10 = 110$.

Ejemplo 56. *Elena quiere escoger cinco cartas de una baraja de póker (13 de cada palo: picas, tréboles, diamantes y corazones) ¿De cuántas formas puede hacerlo si quiere escoger al menos un trébol?*

Tiene $\binom{52}{5} = 2 \cdot 598 \cdot 960$ formas de escoger las cinco cartas. De estas, las que no le interesan son aquellas en las que no hay tréboles que son $\binom{39}{5} = 575 \cdot 757$. Luego, la respuesta es $2 \cdot 598 \cdot 960 - 575 \cdot 757 = 2 \cdot 023 \cdot 203$ posibles selecciones

Ejemplo 57. *Un profesor de Matemática Discreta cuenta cinco chistes cada mes. ¿Cuántos chistes diferentes debe conocer el profesor para que en un período de 4 años no repita el mismo conjunto de 5 chistes?*

Necesitamos n para que $C(n,5)$ sea al menos 48 (número de meses en 4 años. Puesto que $C(7,5) = 21$ y $C(8,5) = 56$, debe conocer al menos 8 chistes diferentes.

Ejemplo 58. *Un gimnasio abre todos los días de la semana y cada socio acude al menos tres días por semana. ¿Cuál es el mínimo número de socios que debe tener para garantizar que al menos dos de ellos coinciden los mimos días?*

Cada socio puede acudir 3, 4 ,5, 6 o todos los días de la semana, lo que nos da un total de

$$\sum_{k=3}^{7}\binom{7}{k} = 2^7 - \sum_{k=0}^{2}\binom{7}{k} = 128 - 1 - 7 - 41 = 99$$

posibles selecciones de los días de la semana que acude cada socio. Si hay 100 socios, al menos dos coinciden los mismos días.

4.2.5. Combinaciones con repetición

En una heladería disponen de 5 sabores diferentes para un helado. ¿De cuántas formas se pueden elegir 10 helados? En este ejemplo, se trata de combinaciones (no importa el orden de elección) pero es obvio que hemos de repetir sabor ya que n (5) es menor que r (10).

Definición 51. *Una* combinación con repetición de orden r *de los* n *elementos de* A *es una selección no ordenada de* r *elementos de* A *que pueden repetirse. El número de tales combinaciones se denota* $CR(n, r)$.

Teorema 23. *El número de combinaciones con repetición de orden* r *de* n *elementos es*

$$CR(n, r) = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}.$$

Demostración. Cada combinación con repetición de orden r de los elementos de A se corresponde con una solución de

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r,$$

siendo x_i el número de veces que elegimos el elemento i-ésimo. Así pues, estamos considerando únicamente soluciones $(x_1, \ldots, x_n)$ positivas ($x_i \geq 0$, para cada i). Por otro lado, cada solución positiva $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de la ecuación anterior se corresponde con una cadena de r 1's y $n-1$ barras distribuidos como:

$$\overbrace{1\ldots1}^{x_1} \mid \overbrace{1\ldots1}^{x_2} \mid \cdots \mid \overbrace{1\ldots1}^{x_n}$$

Por lo tanto, buscamos el número de formas de colocar $n-1$ barras en $n+r-1$ posiciones. [2] Ese número es claramente $\binom{n+r-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r}$. □

[2] Pensemos en $n = 3$ y $r = 5$. La solución $1+2+2 = 5$ se corresponde con la combinación $a_1a_2a_2a_3a_3$ y con la cadena 1 | 11 | 11. A su vez, la cadena 111 | 1 | 1 se corresponde con la solución $3+1+1 = 5$ y con la combinación $a_1a_1a_1a_2a_3$. ¿Con que cadenas se corresponden las combinaciones $a_1a_1a_1a_1a_1$ y $a_2a_2a_3a_3a_3$?

Ejemplo 59. *¿De cuántas formas se pueden colocar 12 bolas en cinco recipientes si a) cada bola es de un color diferente, b) todas las bolas son iguales?*

Si los objetos son todos diferentes, para cada objeto tenemos 5 elecciones posibles (los cinco recipientes), luego hay 5^{12} *posibilidades; son cadenas ordenadas de longitud 12 formadas con 1,2,3,4 y 5.*

Si las bolas son iguales, lo que interesa es saber cuántas bolas habrá en cada recipiente, es decir, el número de soluciones positivas de

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = 12,$$

que es $\binom{16}{12} = \binom{16}{4} = 1820$.

Ejemplo 60. *¿De cuántas formas se pueden elegir 11 helados entre cinco sabores si queremos que haya al menos un helado de cada sabor?*

Empezamos sirviendo cinco helados, uno de cada sabor.[3] *Quedan por servir 6 helados con 5 sabores, lo cual equivale a encontrar las soluciones positivas de*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6,$$

que son

$$\binom{10}{6} = \binom{10}{4} = 210.$$

r objetos entre n	**Ordenadas**	**No Ordenadas:**
Sin repetición	$V(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$	$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
Con repetición	$VR(n,r) = n^r$	$CR(n,r) = \binom{n+r-1}{n-1}$

4.2.6. Permutaciones con repetición

Ya sabemos que hay 8! formas de ordenar las letras de “COMPUTER”. ¿Si pensamos en la palabra “CAJA”, está claro que no son $4! = 24$ ya que las dos A juegan el mismo papel. En general, si tenemos n objetos, de los cuales hay n_1 de un primer tipo, n_2 de un segundo tipo,..., n_r de un r-ésimo tipo, con $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, existen

$$PR_n^{n_1,\ldots n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$$

disposiciones posibles.

[3] Es como introducir una bola en cada caja para que ninguna quede vacía.

En efecto, disponemos de n posiciones para colocar los n_1 objetos del primer tipo. Como son iguales, no importa el orden en el que elijamos las posiciones y lo podemos hacer de

$$\binom{n}{n_1}$$

formas distintas. Entre las $n - n_1$ posiciones restantes, tenemos

$$\binom{n-n_1}{n_2}$$

posibilidades de elegir la posición de los objetos del segundo tipo. Finalmente quedan $n - (n_1 + n_2 + \cdots + n_{r-1}) = n_r$ posiciones para colocar n_r objetos, lo cual sólo admite una colocación. En resumen:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n_r}{n_r} = \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!}\cdots 1 = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}$$

Ejemplo 61. I) *¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras de la palabra ABRACADABRA?*

Como hay 5 A's, 2 B's, 2 R's una C y una D, tenemos

$$\frac{11!}{5!\,2!\,2!} = \frac{11*10*9*8*7*6}{4} = 11*10*9*2*7*6 = 83160$$

posibles ordenaciones.

II) *¿En cuántas figuran cuatro A's juntas (exactamente cuatro)?*

Formamos un bloque con cuatro A's y ordenamos primero 2 R's, 2 B's, la otra A, una D y una C, lo cual puede hacerse de

$$\frac{7!}{2!\,2!} = \frac{7*6*5*4*3*2}{4} = 1260$$

formas. Por otro lado, el bloque de A's que tenemos podemos colocarlo en cualquiera de las seis posiciones que no se corresponden con la anterior y la posterior a la A[4]*, para que no queden las cinco A's juntas. Así pués, la respuesta es:*

$$6*1260 = 7560$$

colocaciones posibles

---

[4] Si la ordenación fuese $ABBRRCD$, podemos situarlo en lugar de cualquiera de los $*$, es decir $AB*B*R*R*C*D*$.

iii) *¿En cuántas figura cada B seguida de al menos 2 A's?*

Formamos dos bloques BAA, BAA. Quedan 2 R's, una C, una D, una A y dos bloques. Por lo tanto, tenemos

$$\frac{7!}{2!\,2!} = \frac{7*6*5*4*3*2}{4} = 1260$$

posibilidades.

iv) *¿En cuántas figuran los bloques ABR?*

Hay dos bloques ABR y quedan 3 A's, una C y una D. tenemos, en total

$$\frac{7!}{3!\,2!} = \frac{7*6*5*4}{2} = 420$$

disposiciones con los bloques requeridos.

Ejemplo 62. *Para trasladarnos de un punto A(0,0) hasta un punto B(5,4) podemos movernos únicamente de izquierda a derecha y de arriba a abajo. ¿De cuántas maneras podemos ir desde A hasta B?*

Una posible ruta sería DDDDDAAAA (se corresponde con bordear el rectángulo). Cualquier ruta es una cadena de 9 elementos con 5 D's y 4 A's. Así pués, la solución es:

$$PR^9_{5,4} = \frac{9!}{5!\ 4!.}$$

4.2.7. Permutaciones circulares

Una *permutación circular de orden* $r \leq n$ de n objetos es una disposición de r objetos (de entre los n) en r posiciones igualmente espaciadas en la circunferencia. Dos permutaciones circulares son iguales si una se puede obtener a partir de la otra mediante una conveniente rotación alrededor del centro de la circunferencia.

Ejemplo 63. *Si los elementos son* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ *y hemos de elegir cuatro, supongamos que los elegidos son* $1, 2, 4, 5$. *Las ordenaciones posibles son 24 (4!) pero de ellas sólo son diferentes como permutaciones circulares* 1245 *(*$= 2451 = 4512 = 5124$ *como permutación circular),* 1254, 1425, 1452, 1524 *y* 1542.

Teorema 24. *El número de permutaciones circulares de orden* r *de* n *objetos es:*

$$\binom{n}{r}(r-1)!$$

Demostración. Primero escogemos los r elementos que hemos de colocar, lo cual podemos hacerlo de $\binom{n}{r}$ formas distintas. Si hemos elegido los elementos $a_{f(1)}, a_{f(2)}, \ldots, a_{f(r)}$, tenemos $r!$ maneras de disponerlos en la circunferencia. Finalmente, si observamos que cada disposición que consiste en trasladar los elementos una posición a la derecha da lugar a la misma permutación circular, nos queda que

$$a_{f(1)}a_{f(2)} \ldots a_{f(r)} = a_{f(2)}a_{f(3)} \ldots a_{f(1)} = \cdots = a_{f(r)}a_{f(1)} \ldots a_{f(r-1)},$$

por lo que el número que buscamos es:

$$\binom{n}{r}\frac{r!}{r} = \binom{n}{r}(r-1)!$$

$\square$

Ejemplo 64. *En una fiesta tenemos que sentar alrededor de una mesa circular a cuatro chicos y cuatro chicas. ¿De cuántas formas podemos hacerlo si queremos que los sexos estén alternados? ¿Cuántas disposiciones son posibles si ahora la única condición es que uno de los chicos insiste en sentarse al lado de una de las chicas*[5]*?*

Sentemos primero a los chicas. Tenemos $3! = 6$ *formas de hacerlo. Entre ellas tenemos cuatro huecos en los que hemos de colocar a los 4 chicos. Eso nos da un total de* $6 * 4! = 6 * 24 = 144$ *formas de sentarse con alternancia de sexos* [6]*.*

Con respecto a la segunda pregunta, sentaremos en primer lugar a las otras seis personas primero para lo cual tenemos $5! = 120$ *posibilidades. En los 6 huecos que quedan entre ellos sentamos a nuestra pareja en cualquiera de los órdenes posibles* H_1M_1 *o* M_1H_1*. En total tenemos, pués* $2 * 6 * 5! = 2 * 6! = 1440$ *formas de que nuestra pareja de tortolitos se sienten juntos.*

4.3. Teorema del Binomio

Lema 4. *Sea n un número natural y $0 \leq r \leq n-1$, entonces:*

- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
- $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$.

[5] una en concreto.

[6] También podríamos resolverlo sentando a una de las chicas (M_1), a su izquierda podemos sentar a cualquiera de los 4 chicos, pensemos en H_1, a la izquierda de éste podemos sentar a cualquiera de las 3 chicas restantes, etc. Al final resultan $4*3*3*2*2 = 6*4! = 144$ maneras.

Demostración. La primera es consecuencia inmediata de la definición y la segunda[7] de que

$$\begin{aligned}
\binom{n}{r+1}+\binom{n}{r} &= \frac{n!}{(r+1)!\,(n-r-1)!}+\frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \\
\frac{n!(n-r)+n!(r+1)}{(r+1)!\,(n-r)!} &= \frac{n!(n+1)}{(r+1)!\,(n-r)!} = \\
&= \binom{n+1}{r+1}
\end{aligned}$$

□

Basándose en el lema anterior se construye el triángulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

o, dándole a cada número combinatorio su valor:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Teorema 25. *Para cualquier par de números reales a y b y n natural, se tiene que:*

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Demostración. La demostración se hace por inducción en n. El caso base $(n=1)$ es inmediato y si, suponemos que es cierto para n, se tiene que:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n &= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}
\end{aligned}$$

[7] Se puede argumentar que el número de subconjuntos de cardinal $r+1$ de un conjunto de $n+1$ elementos $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_{n+1}\}$ es $\binom{n+1}{r+1}$. Si X es uno de tales subconjuntos, puede ocurrir que $a_1\in X$ o que $a_1\notin X$. Para contar los subconjuntos del primer tipo, hay que tener en cuenta que hay que elegir r elementos entre los n diferentes de a_1. Con respecto al segundo tipo, hay que hacer una elección de $r+1$ elementos entre todos los diferentes a a_1.

Separamos el primer sumando del primer sumatorio ($\binom{n}{n}a^{n+1}$) y el último sumando del segundo ($\binom{n}{0}b^{n+1}$). Además, hacemos en el segundo sumatorio un cambio de variable ($j = k+1$), con lo que nos queda:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \binom{n}{0}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \binom{n}{n}b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^{n+1-j}b^j \\ &= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}\right)a^{n+1-j}b^j + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}a^{n+1-j}b^j + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}a^{n+1-j}b^j.\end{aligned}$$

□

Como consecuencia, obtenemos el valor de la suma de cualquiera de las filas del triángulo de Pascal:

Corolario 12.

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$

Demostración. Basta tomar en el teorema anterior $a = b = 1$ en un caso y $a = 1$ y $b = -1$ en el segundo caso. □

Ejemplo 65. *Halla el coeficiente de x^9y^3 en $(2x-3y)^{12}$. ¿Cuál es la suma de todos los coeficientes?*

Según acabamos de ver

$$(2x-3y)^{12} = \sum_{i=0}^{12}\binom{12}{i}(2x)^{12-i}(-3y)^i$$

Por lo tanto, el coeficiente que nos piden aparece en el sumando correspondiente a $i = 3$:

$$\binom{12}{9}2^9x^9(-3)^3y^3 = 220 * 512 * (-27)\,x^9y^3 = -3041280\,x^9y^3$$

Por otro lado, la suma de los coeficientes

$$\sum_{i=0}^{12} \binom{12}{i} 2^i(-3)^{12-i}$$

se obtiene tomando $x = y = 1$ en $(2x - 3y)^{12}$, es decir

$$\sum_{i=0}^{12} \binom{12}{i} 2^i(-3)^{12-i} = (-1)^{12} = 1$$

Cuando tenemos más de dos sumandos, usamos la fórmula de Leibniz:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = (x_1 + x_2 + \cdots + x_k)\overbrace{\cdots}^{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$$

Cada término será de la forma $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ con $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. ¿Cuántos hay de este tipo? Tantos como maneras de ordenar n elementos con n_1 iguales, n_2 iguales, etc. Ese número es:

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$$

Por lo tanto:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \frac{n!}{n_1\,!n_2! \cdots n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}.$$

Ejemplo 66. *Halla el coeficiente de $w^3x^2yz^2$ en $(2w - x + 3y - 2z)^8$. ¿Cuál es la suma de todos los coeficientes?*

Según acabamos de ver

$$(2w - x + 3y - 2z)^8 = \sum_{i+j+k+r=8} \frac{8!}{i!\, j!\, k!\, r!} (2w)^i(-x)^j(3y)^k(-2z)^r$$

Por lo tanto, el coeficiente que nos piden aparece en el sumando correspondiente a $i = 3, j = 2, k = 1, r = 2$:

$$\frac{8!}{3!\, 2!\, 1!\, 2!} (2w)^3(-x)^2(3y)^1(-2z)^2 = 161280\, w^3x^2yz^2.$$

Por otro lado, la suma de los coeficientes

$$\sum_{i+j+k+r=8} \frac{8!}{i!\, j!\, k!\, r!} 2^i(-1)^j3^k(-2)^r$$

se obtiene tomando $w = x = y = z = 1$ en $(2w - x + 3y - 2z)^8$, es decir

$$\sum_{i+j+k+r=8} \frac{8!}{i!\, j!\, k!\, r!} 2^i(-1)^j3^k(-2)^r = (2 - 1 + 3 - 2)^8 = 2^8 = 256.$$

4.4. Principio de inclusión-exclusión

En su forma más simple, el principio dice que si A y B son dos conjuntos finitos, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Veamos cómo se obtiene el cardinal de una unión finita de conjuntos finitos, S_i, con $i = 1 \ldots, n$. Supongamos que $S_i \subseteq S$ siendo S tambien finito. Normalmente cada S_i viene caracterizado por una cierta propiedad P_i que sólo verifican sus elementos[8], es decir:

$$S_i = \{x \in S \; ; \; x \text{ verifica } P_i\}$$

Es claro que:

$$\bigcup_{i=1}^{n} S_i = \{x \in S \; ; \; x \text{ verifica alguna propiedad } P_i\}$$

y

$$\bigcap_{i=1}^{n} \overline{S_i} = \{x \in S \; ; \; x \text{ no verifica ninguna propiedad } P_i\}$$

Teorema 26. I)

$$\begin{aligned} \left|\bigcap_{i=1}^n \overline{S_i}\right| &= |S| - \sum_{i=1}^n |S_i| + \sum_{i<j}^n |S_i \cap S_j| + \cdots + (-1)^n |S_1 \cap \cdots \cap S_n| = \\ &= |S| + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_k}|. \end{aligned}$$

II)

$$\begin{aligned} \left|\bigcup_{i=1}^n S_i\right| &= \sum_{i=1}^n |S_i| - \sum_{i<j}^n |S_i \cap S_j| + \cdots + (-1)^{n-1} |S_1 \cap \cdots \cap S_n| = \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_k}|. \end{aligned}$$

Demostración. Nótese que ambas son equivalentes ya que

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{S_i}\right| = |S| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right|$$

Para probar la primera tomemos cualquier elemento $x \in S$ y veamos que x se "cuenta" tantas veces a la izquierda de la igualdad como a la derecha. Distingamos varios casos:

[8] P_i puede ser x verifica P_i si, y sólo si, $x \in S_i$.

- x no satisface ninguna de las propiedades P_i, es decir $x \in \bigcap_{i=1}^n \overline{S_i}$ y contribuye con un 1 a la izquierda. Por otro lado, $x \in S$ pero $x \notin S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_k}$, para todos $i_1 < \cdots < i_k$ y para todo k. Luego x también se cuenta una vez en el segundo miembro de la igualdad.

- x satisface m de las n propiedades ($m \leq n$), es decir x pertenece a m de los n conjuntos S_i. Como $x \notin \bigcap_{i=1}^n \overline{S_i}$, x contribuye con 0 en la parte de la izquierda.

  Además x contribuye con m a la suma $\sum_{i=1}^n |S_i|$ y, en general , para cada $1 \leq k \leq n$, x pertenece a $\binom{m}{k}$ intersecciones del tipo $S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_k}$.[9] Queda claro que, si $k > m$, entonces x contribuye[10] con $\binom{m}{k} = 0$ y, por lo tanto, x se cuenta

$$1 + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} = (1-1)^m = 0.$$

  veces a la derecha de la igualdad.

□

Ejemplo 67. *¿De cuántas formas se pueden repartir 12 bolas distintas en cinco cajas de manera que ninguna caja quede vacía?*

Llamemos S al conjunto de maneras de repartir 12 bolas distintas en cinco cajas distintas. Es claro que el cardinal de S es 5^{12}. Si ahora

$$S_i = \{x \in S \ ; \ \text{ la caja } i \text{ queda vacía}\}$$

nos piden el cardinal de

$$\bigcap_{i=1}^{n} \overline{S_i}$$

En primer lugar, $|S_i| = 4^{12}$ ya que se trata de repartir 12 bolas distintas en 4 cajas (todas menos la i-ésima). Análogamente $|S_i \cap S_j| = 3^{12}$, $|S_i \cap S_j \cap S_k| = 2^{12}$, $|S_i \cap S_j \cap S_k \cap S_r| = 1$ y $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap S_5 = \emptyset$. Resumiendo, nos quedan

$$\left| \bigcap_{i=1}^{n} \overline{S_i} \right| = 5^{12} - 5 * 4^{12} + 10 * 3^{12} - 10 * 2^{12} + 5 = 165528000$$

formas de repartir 12 bolas en cinco cajas sin que ninguna quede vacía.

---

[9] Las que se pueden formar con m conjuntos escogiéndolos de k en k.

[10] En ese caso, $\binom{m}{k} = 0$

Ejemplo 68. *Una madre quiere repartir 11 pasteles iguales entre sus cuatro hijos de manera que cada uno reciba al menos un pastel y no más de tres,¿cuántas posibilidades tiene para hacerlo?*

Se trata de resolver la ecuación:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$$

con $1 \leq x_i \leq 3$. Comenzamos dándole a cada niño un pastel[11], con lo que ahora tenemos que resolver

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7$$

donde $0 \leq y_i \leq 2$. Llamemos S al conjunto de soluciones con $y_i \geq 0$, para todo i. Sabemos que $|S| = \binom{10}{7} = 120$. Si ahora cada

$$S_i = \{y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in S \; ; \; y_i \geq 3\},$$

nos queda $|S_i|$[12] $= \binom{7}{3} = 35$, $|S_i \cap S_j|$[13] $= \binom{4}{3} = 4$. Por lo tanto, la madre puede repartir los pasteles de

$$\binom{10}{7} - 4 * \binom{7}{4} + 6 * \binom{4}{1} = 120 - 4 * 35 + 6 * 4 = 144 - 140 = 4.$$

formas que se corresponden con $2+3+3+3 = 3+2+3+3 = 3+3+2+3 = 3+3+3+2 = 11$

Ejemplo 69. *¿Cuántas aplicaciones sobreyectivas se pueden definir del conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ de m elementos al conjunto $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ de n elementos?*

Llamamos S al conjunto de aplicaciones de A en B y

$$S_i = \{f : A \to B \; ; \; f^{-1}(y_i) = \emptyset\},$$

para cada $i = 1, \ldots, n$. Razonando como en los ejemplos anteriores nos queda que el número buscado es

$$\left| \bigcap_{i=1}^{n} \overline{S_i} \right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m.$$

[11] o sea haciendo el cambio de variable $y_i = x_i - 1$

[12] es el conjunto de soluciones positivas de $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 4$

[13] es el conjunto de soluciones positivas de $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1$

Ejemplo 70. *¿De cuántas formas pueden ordenarse 3 bolas rojas, 3 azules y 2 blancas de modo que no todas las bolas del mismo color queden consecutivas?*

Sea ahora S el conjunto de maneras de ordenar las 8 bolas. Sabemos que

$$|S| = \frac{8!}{3!3!2!} = 560.$$

Si llamamos

$$\begin{aligned} S_1 &= \{x \in S\ ;\ \text{ las tres bolas rojas quedan juntas}\} \\ S_2 &= \{x \in S\ ;\ \text{ las tres bolas azules quedan juntas}\} \\ S_3 &= \{x \in S\ ;\ \text{ las dos bolas blancas quedan juntas}\} \end{aligned}$$

Para calcular el cardinal de $\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3}$, hay que tener en cuenta que el papel de S_1 y S_2 es simétrico, por lo que

$$|S_1| = |S_2| = \frac{6!}{3!2!} = 60$$

ya que hemos de ordenar un bloque de bolas rojas (o azules), 3 bolas azules (o rojas) y 2 bolas blancas. Análogamente

$$|S_3| = \frac{7!}{3!3!} = 140$$

y

$$|S_1 \cap S_2| = \frac{4!}{2!} = 12\ ;\ |S_1 \cap S_3| = |S_2 \cap S_3| = \frac{5!}{3!} = 20 \ \text{ y } \ |S_1 \cap S_2 \cap S_3| = 3! = 6.$$

Resumiendo, nos quedan

$$|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3}| = 560-(60+60+140)+(12+20+20)-6 = 560-260+52-6 = 346.$$

formas de ordenar las bolas sin que queden todas las del mismo color juntas.

4.4.1. Desórdenes

Supongamos que 5 personas dejan sus abrigos en el guardarropa de un restaurante. ¿De cuántas formas se le pueden devolver los abrigos si se sabe que ninguno de ellos recibirá el suyo? Si llamamos:

$$S = \{\text{formas de ordenar 5 abrigos}\}$$

y

$$S_i = \{x \in S\ ;\ \text{ la persona } i-\text{ésima recibe su abrigo}\}$$

lo que queremos calcular es el cardinal de

$$\bigcap_{i=1}^{5} \overline{S_i} = |S| + \sum_{k=1}^{5} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le 5} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_k}|.$$

Es claro que $|S| = 5!$, $|S_i| = 4!$ y, en general, $|S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_k}| = (5-k)!$, para cada $1 \le k \le 5$. Así que la respuesta es:

$$5! - 5 * 4! + \binom{5}{2} * 3! - \binom{5}{3} * 2! + \binom{5}{4} * 1! - 1 = 120 - 120 + 60 - 20 + 5 - 1 = 44.$$

En general, si tenemos n objetos, el número de formas de desordenarlos es:

$$d(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Ejemplo 71. *Supongamos que 5 personas dejan su abrigo y su paraguas en el guardarropa. ¿De cuántas formas se le pueden devolver las prendas si cada una de ellas no recibe ni su abrigo ni su paraguas? ¿Y si cada una no recibe alguna de las dos prendas?*

En el primer caso, tenemos $d(5) = 44$ formas de desordenar 5 paraguas y $d(5)$ formas de desordenar 5 abrigos, lo que hacen un total de $d(5) * d(5) = 44 * 44 = 1936$. En el segundo caso, queremos que cada persona reciba o bien un paraguas, o bien un abrigo, que no sean los suyos. Sea entonces S el conjunto de formas de repartir los 5 paraguas y los 5 abrigos y, para cada i, denotemos

$$S_i = \{x \in S\ ;\ \text{ la persona } i \text{ recibe su abrigo y su paraguas}\}.$$

De este modo, lo que nos piden es el cardinal de

$$\bigcap_{i=1}^{5} \overline{S_i}$$

Ahora bien, $|S| = 5!5!$ y, para cada $1 \le k \le 5$, si consideramos $S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_k}$, vemos que está formado por todas las maneras de repartir los abrigos y los paraguas de modo que las personas $i_1, i_2, \ldots, i_k$ reciban sus dos prendas, por lo que, se trata de contar las formas de repartir los $5-k$ abrigos y los $5-k$ paraguas. Por lo tanto, el cardinal pedido es

$$\begin{aligned} \textstyle\bigcap_{i=1}^{5} \overline{S_i} &= \textstyle\sum_{k=0}^{5} (-1)^k \binom{5}{k} (5-k)!(5-k)! = \\ &= 5! * 5! - 5 * 4! * 4! + \tbinom{5}{2} * 3! * 3! - \tbinom{5}{3} * 2! * 2! + \tbinom{5}{4} * 1! * 1! - 1 = 11844 \end{aligned}$$