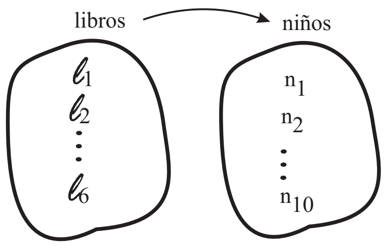
Matemática Discreta. Combinatoria

Caso 1:

Se reparten 6 libros distintos entre 10 niños:

- Si cualquier niño puede recibir cualquier número de libros:



  $10 \cdot 10 \cdot \overset{(6}{\cdots} \cdot 10 = 10^6 = VR(10,6)$

- Con la condición de que ningún niño reciba más de un libro, la aplicación *libros* $\rightarrow$ *niños* debe ser inyectiva.

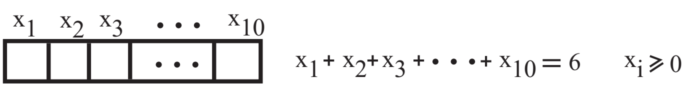
$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = V(10,6)$$

  También se puede ver como $\binom{10}{6} \cdot 6!$, es decir, elegimos los 6 niños y ordenamos los libros.

Caso 2:

Se reparten 6 canicas iguales entre 10 niños:

- Si cada niño puede recibir cualquier número de canicas.



  (x_i es el número de canicas que se le dan al niño n_i).

- Con la condición de que ningún niño pueda recibir más de una canica:

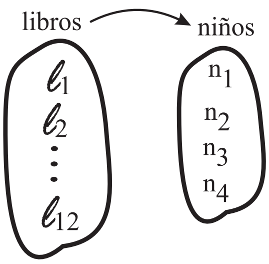
$$\binom{10}{6} \text{ elegimos los 6 niños a los que le damos una canica}$$

  Si se tienen 10 canicas y 6 niños, se puede pedir que todos los niños reciban alguna canica y/o se pueden poner topes superiores (por ejemplo $0 \leq x_1 \leq 3$, $1 \leq x_2 \leq 4$, ...) Para resolver este caso se utiliza el principio de inclusión-exclusión.

Caso 3:

Se reparten 12 libros distintos entre 4 niños:

- Si cada niño puede recibir cualquier número de libros, hay $VR(4,12) = 4^{12}$ posibilidades



- Con la condición de que ningún niño quede sin libro, la aplicación debe ser sobreyectiva y se resuelve mediante el principio de inclusión-exclusión.

- Si al niño n_1 le dan 4 libros, al niño n_2 le dan 3 libros, al niño n_3 le dan 3 libros y al niño n_4 le dan 2 libros resulta
$$\binom{12}{4}\binom{8}{3}\binom{5}{3}\binom{2}{2}$$

- Si a dos niños se le dan 4 libros y a los otros se le dan 2, se eligen los dos niños $\binom{4}{2}$ y se reparten $\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{2}\binom{2}{2}$. El total es el producto de las dos cantidades
$$\binom{4}{2}\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{2}\binom{2}{2}$$

Caso 4:

- Ordenar 12 libros distintos en 4 estantes: primero ordenamos los libros (hay 12! formas de hacerlo) y hacemos bloques x_i con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ y $x_i \geq 0$.

  Otra forma de hallar el número de casos sería pensar que hay que ordenar los 12 libros $l_1, l_2, \ldots, l_{12}$ y tres "barras", que indicarían la separación entre un estante y el otro. Así, serían permutaciones con repetición de $15 = 12 + 3$ elementos donde 3 están repetidos. Por ejemplo, la secuencia
$$/l_2\ l_4\ /\ /l_1, l_3, l_5, l_6, l_7, l_8, l_9, l_{10}, l_{11}, l_{12}$$
  indica que en el primer estante no hay libros, en el segundo están $l_2\ l_4$ (en ese orden), el tercero también está vacío y en el cuarto están $l_1, l_3, l_5, l_6, l_7, l_8, l_9, l_{10}, l_{11}, l_{12}$ (en ese orden).

- Si ningún estante queda vacío: primero ordenamos los libros (hay 12! formas de hacerlo) y hacemos bloques x_i con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ y $x_i \geq 1$.

  Otra posibilidad sería pensar que hay que ordenar los 12 libros $l_1, l_2, \ldots, l_{12}$ y tres "barras", pero en esa secuencia no puede empezar ni acabar con una barra y no pueden ir dos barras seguidas. Entonces, se colocarían los 12 libros (hay 12! formas de hacerlo) y luego se eligen 3 huecos donde colocar las divisiones (hay C(11,3) posibilidades).