

Tema 2

REPRESENTACIÓN Y TRATAMIENTO DE LOS SISTEMAS DIGITALES

2.1. ÁLGEBRA DE BOOLE

En el diseño de los sistemas digitales se hace un uso extensivo de la teoría lógica. Es preciso pues conocer detalladamente las propiedades matemáticas de las funciones lógicas. Estas se incluyen en la teoría matemática de las Álgebras de Boole.

Definición 2.1 *Un ÁLGEBRA DE BOOLE es un conjunto $A = \{a, b, c, \dots\}$ que verifica los siguientes postulados:*

1. *Existen dos operaciones binarias internas ($+$ y \cdot) definidas sobre el conjunto, es decir, el resultado de estas dos operaciones se encontrará siempre dentro del conjunto.*
2. *Estas operaciones son conmutativas: $a + b = b + a$ y $ab = ba$*
3. *Ambas son distributivas una con respecto a la otra:*

$$\begin{aligned} &\cdot \text{ distributiva respecto a } +: a(b + c) = ab + ac \\ &+ \text{ distributiva respecto a } \cdot: a + bc = (a + b)(a + c) \end{aligned}$$

(Esta última propiedad no la verifican los números reales)

4. *Existen elementos neutros para ambas operaciones, 0 para $+$ y 1 para \cdot : $a + 0 = a$ y $a \cdot 1 = a$*
5. *Todo elemento del álgebra tiene su complementario. Se denota por \bar{a} y ha de verificar las dos condiciones siguientes: $a + \bar{a} = 1$ y $a\bar{a} = 0$.*

18TEMA 2. REPRESENTACIÓN Y TRATAMIENTO DE LOS SISTEMAS DIGITALES

El Álgebra de Boole más sencilla es aquella formada por los elementos $\{0,1\}$ con las operaciones AND y OR definidas en el primer tema.

Una propiedad importante de un Álgebra de Boole es el **principio de Dualidad**. Este principio establece que las expresiones algebraicas deducidas a partir de un Álgebra de Boole permanecen válidas si se intercambian los operadores (+ por \cdot) y los elementos neutros (0 por 1).

Otras propiedades importantes de un Álgebra de Boole son las siguientes:

1. Asociativa: $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$ y $abc = (ab)c = a(bc)$

2. Idempotencia: $a + a = a$ y $aa = a$

3. Absorción del neutro: $a + 1 = 1$ y $a \cdot 0 = 0$

4. Involución: $\overline{(\overline{a})} = a$

5. Absorción: $a + ab = a$

6. $a + \overline{ab} = a + b$

7. Leyes de De Morgan:

$$\begin{array}{l} \overline{a + b} = \overline{a} \overline{b} \\ \overline{a + b + \dots + n} = \overline{a} \overline{b} \dots \overline{n} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \overline{ab} = \overline{a} + \overline{b} \\ \overline{ab \dots n} = \overline{a} + \overline{b} + \dots + \overline{n} \end{array}$$

Todas estas propiedades pueden demostrarse directamente a partir de los postulados del Álgebra de Boole. Como ejemplo vamos a verificar dos de ellas, quedando las demás como ejercicios para los alumnos:

■ Propiedad 2: $a + a = a$

$$\begin{array}{ll} a + a &= (a + a) \cdot 1 && \text{Elemento neutro 1} \\ &= (a + a)(a + \overline{a}) && \text{Complementario} \\ &= a + a\overline{a} && \text{Distributiva} \\ &= a + 0 && \text{Complementario} \\ &= a && \text{Elemento neutro 0} \end{array}$$

■ Propiedad 6: $a + \overline{ab} = a + b$

$$\begin{array}{ll} a + \overline{ab} &= (a + \overline{a})(a + b) && \text{Distributiva} \\ &= 1 \cdot (a + b) && \text{Complementario} \\ &= a + b && \text{Elemento neutro 1} \end{array}$$

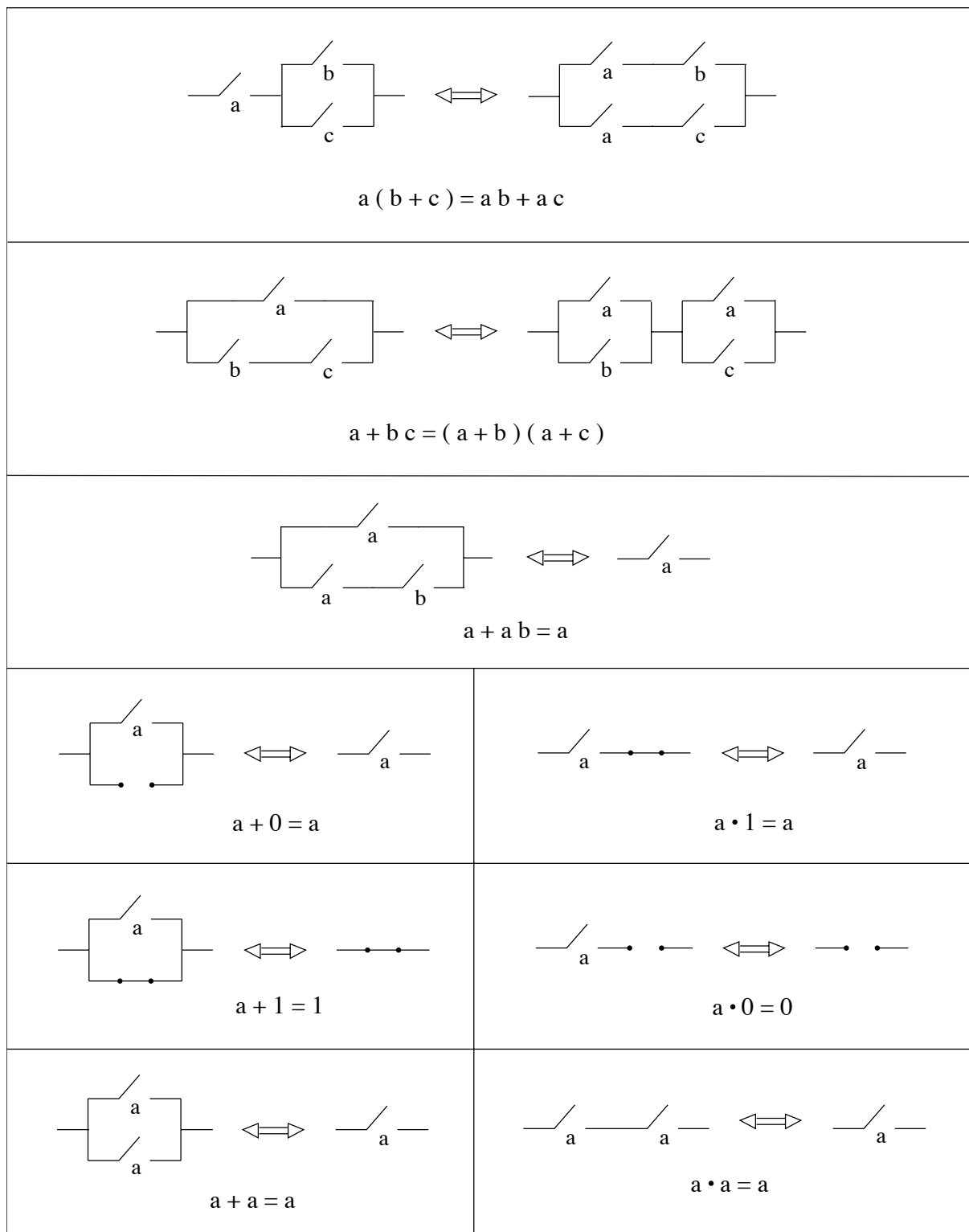
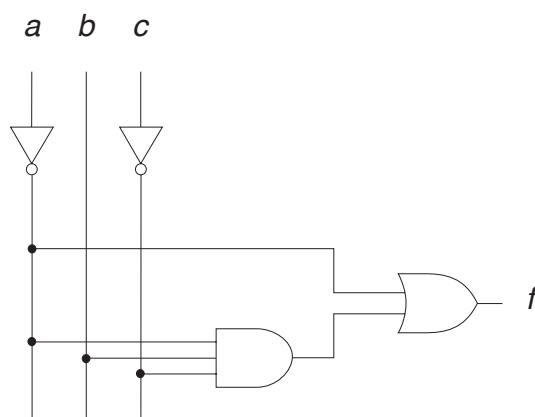


Figura 2.1: Interpretación física de algunas propiedades del Álgebra de Boole.

Figura 2.2: Implementación de la función f del ejemplo

2.2. FUNCIONES DE BOOLE

Una función f de n variables sobre un Álgebra de Boole A es una aplicación

$$f : \overbrace{A \times A \times \cdots \times A}^n \longrightarrow A$$

Si $A = \{0, 1\}$ son 2^n las posibles combinaciones de entrada $(x_{n-1}, \dots, x_1, x_0)$, donde $x_i \in \{0, 1\}$.

Una Función de Boole puede definirse mediante expresiones del Álgebra de Boole o bien dando su Tabla de Verdad (tabla de valores).

Ejemplo: $f(a, b, c) = \bar{a} + \bar{a}b\bar{c}$

$f(0, 0, 0) = 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1 = 1$	a	b	c	f
$f(0, 0, 1) = 1 + 1 \cdot 0 \cdot 0 = 1$	0	0	0	1
$f(0, 1, 0) = 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$	0	0	1	1
$f(0, 1, 1) = 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 = 1$	0	1	0	1
$f(1, 0, 0) = 0 + 0 \cdot 0 \cdot 1 = 0$	0	1	1	1
$f(1, 0, 1) = 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$	1	0	0	0
$f(1, 1, 0) = 0 + 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$	1	0	1	0
$f(1, 1, 1) = 0 + 0 \cdot 1 \cdot 0 = 0$	1	1	0	0
	1	1	1	0

Dos funciones se dicen iguales si sus Tablas de Verdad son iguales. Por ejemplo, la función anterior f es igual a la siguiente función $f_1(a, b, c) = \bar{a}$. A esta conclusión se podría haber llegado simplificando f mediante las propiedades del Álgebra de Boole:

$$f(a, b, c) = \bar{a} + \bar{a}b\bar{c} = \bar{a}(1 + b\bar{c}) = \bar{a}$$

Funciones de Boole son también las funciones AND y OR, que para tres variables tienen la siguiente Tabla de Verdad:

a	b	c	abc	$a + b + c$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

En general la función AND de n variables es 1 cuando todas las variables toman el valor 1. La función OR de n variables es 1 cuando alguna de las n variables es 1.

2.3. EXPRESIONES CANÓNICAS DE UNA FUNCIÓN DE BOOLE

En primer lugar vamos a definir dos conceptos muy importantes:

Definición 2.2 Para funciones de n variables, llamamos **minterm** a un término producto que contiene cada una de las n variables, o bien negadas o bien sin negar, sin repetirse ninguna.

Ejemplo: Para funciones de tres variables serían minterms: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$, abc , $a\bar{b}\bar{c}$. Y no serían minterms: $a\bar{b}$, $a\bar{a}\bar{b}c$.

Los minterms se denotan de forma simplificada tomando un 1 por cada variable sin negar. Los posibles minterms para funciones de 3 variables son los siguientes:

Minterm	Variables	Notación
$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$	000	0
$\bar{a}\bar{b}c$	001	1
$\bar{a}b\bar{c}$	010	2
$\bar{a}bc$	011	3
$a\bar{b}\bar{c}$	100	4
$a\bar{b}c$	101	5
$ab\bar{c}$	110	6
abc	111	7

Definición 2.3 Para funciones de n variables, llamamos **maxterm** a un término suma que contiene cada una de las n variables, o bien negadas o bien sin negar, sin repetirse ninguna.

Ejemplo: Para funciones de tres variables serían maxterms: $\bar{a} + b + \bar{c}$, $a + b + c$, $a + \bar{b} + \bar{c}$. Y no serían maxterms: $a + \bar{b}$, $a + \bar{a} + \bar{b} + c$.

Los maxterms se denotan de forma simplificada tomando un 0 por cada variable sin negar. Los posibles maxterms para funciones de 3 variables son los siguientes:

Maxterm	Variables	Notación
$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$	111	7
$\bar{a} + \bar{b} + c$	110	6
$\bar{a} + b + \bar{c}$	101	5
$\bar{a} + b + c$	100	4
$a + \bar{b} + \bar{c}$	011	3
$a + \bar{b} + c$	010	2
$a + b + \bar{c}$	001	1
$a + b + c$	000	0

Vamos a enunciar un teorema muy importante relacionado con los maxterms y minterms:

Teorema 2.1 (Teorema de expansión de Shannon) *Cualquier función binaria puede expresarse en forma de suma de minterms o en forma de producto de maxterms. Estas expresiones, que son únicas, reciben el nombre de representaciones canónicas de la función.*

Demostración: Queremos expresar una función cualquiera $f(x_n, \dots, x_1)$ en forma de suma de minterms. Podemos poner la función de la siguiente forma:

$$f(x_n, \dots, x_1) = \bar{x}_1 f(x_n, \dots, 0) + x_1 f(x_n, \dots, 1)$$

Esta expresión se verifica para los dos valores posibles de x_1 . Si $x_1 = 0$ quedará:

$$f(x_n, \dots, x_1) = 1 \cdot f(x_n, \dots, 0) + 0 \cdot f(x_n, \dots, 1),$$

y si $x_1 = 1$ tendremos:

$$f(x_n, \dots, x_1) = 0 \cdot f(x_n, \dots, 0) + 1 \cdot f(x_n, \dots, 1).$$

Repetiendo el proceso para x_2 :

$$\begin{aligned} f(x_n, \dots, x_2, x_1) &= \bar{x}_2 \bar{x}_1 f(x_n, \dots, 0, 0) + \bar{x}_2 x_1 f(x_n, \dots, 0, 1) \\ &+ x_2 \bar{x}_1 f(x_n, \dots, 1, 0) + x_2 x_1 f(x_n, \dots, 1, 1) \end{aligned}$$

Y repitiendo el proceso para las n variables:

$$\begin{aligned} f(x_n, \dots, x_2, x_1) &= \bar{x}_n \cdots \bar{x}_2 \bar{x}_1 f(0, \dots, 0, 0) + \bar{x}_n \cdots \bar{x}_2 x_1 f(0, \dots, 0, 1) \\ &+ \bar{x}_n \cdots x_2 \bar{x}_1 f(0, \dots, 1, 0) + \bar{x}_n \cdots x_2 x_1 f(0, \dots, 1, 1) \\ &+ \cdots + x_n \cdots \bar{x}_2 \bar{x}_1 f(1, \dots, 0, 0) + x_n \cdots \bar{x}_2 x_1 f(1, \dots, 0, 1) \\ &+ x_n \cdots x_2 \bar{x}_1 f(1, \dots, 1, 0) + x_n \cdots x_2 x_1 f(1, \dots, 1, 1) \end{aligned}$$

Por tanto, en la expresión de la función van a aparecer aquellos minterms que representan combinaciones de entradas para las cuales la función vale 1, los demás desaparecen.

De forma similar se haría la demostración para expresar una función en forma de producto de maxterms. En este caso van a aparecer aquellos maxterms que representan combinaciones de entrada para los cuales la función vale 0, los demás maxterms desaparecen.

Conclusión: El Teorema de expansión de Shannon demuestra que existe una relación sencilla entre la Tabla de Verdad de una función de Boole y su representación canónica: la función presentará un minterm para las combinaciones de entradas en las cuales la función vale 1 y presentará un maxterm para las combinaciones de entradas en las cuales la función es 0.

Ejemplo: vamos a expresar en forma de suma de minterms y en forma de producto de maxterms la siguiente función f :

	a	b	c	f	Minterm	Maxterm
0	0	0	0	0		$a + b + c$
1	0	0	1	0		$a + b + \bar{c}$
2	0	1	0	1	$\bar{a}b\bar{c}$	
3	0	1	1	0		$a + \bar{b} + \bar{c}$
4	1	0	0	0		$\bar{a} + b + c$
5	1	0	1	1	$a\bar{b}c$	
6	1	1	0	0		$\bar{a} + \bar{b} + c$
7	1	1	1	1	abc	

Donde hemos añadido a la Tabla de Verdad de la función los minterms que corresponden a las combinaciones de entradas para las cuales la función vale 1 y los maxterms que corresponden a las combinaciones de entradas para las cuales la función vale 0. Así tenemos las siguientes representaciones canónicas (en la notación simplificada vamos a indicar los minterms con una “ m ” y los maxterms con “ M ”):

$$f(a, b, c) = \sum m(2, 5, 7) = \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}c + abc$$

$$f(a, b, c) = \prod M(0, 1, 3, 4, 6) = (a + b + c)(a + b + \bar{c})(a + \bar{b} + \bar{c})(\bar{a} + b + c)(\bar{a} + \bar{b} + c)$$

Este desarrollo se generaliza sin dificultad para funciones de cualquier número de variables.

Definición 2.4 Aquellas combinaciones de entradas para las cuales no nos interesa el valor que pueda tomar la salida se llaman **indiferencias** y se dice que las funciones que incluyen indiferencias están **incompletamente especificadas**.

Esto ocurre en algunas ocasiones cuando el circuito que se diseña forma parte de un sistema mayor en el que ciertas entradas se producen sólo en circunstancias tales que la salida del circuito no influirá en el sistema general. Siempre que la salida no tenga ningún efecto, es evidente que no importa si la salida es un 0 ó un 1. Otra posibilidad es que ciertas combinaciones de entrada no ocurran jamás debido a varias restricciones externas. El circuito responderá de alguna forma a cualquier entrada, pero como esas entradas no se producirán nunca no importa si el circuito final responde con una salida de 0 ó 1.

Las indiferencias se indican en la tabla de verdad anotando un “–” como valor funcional, en vez de un 0 ó un 1. No es un símbolo estándar y también son utilizados otros como “ \emptyset ”, “**d**” y “**X**”.

Supongamos por ejemplo, que queremos construir un sistema que produzca como salida el cuadrado de los números del 0 al 4. Necesitaremos tres bits como entradas para representar del 0 al 4 y cinco bits de salida para representar el mayor valor que es $4^2 = 16$. La tabla de verdad de este sistema sería la siguiente:

a	b	c	f_4	f_3	f_2	f_1	f_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	–	–	–	–	–
1	1	0	–	–	–	–	–
1	1	1	–	–	–	–	–

Las representaciones canónicas para estas funciones serían, en notación simplificada (nótese que en este caso las indiferencias son indicadas con una “ d ” o “ D ” como un término a parte de los minterms o maxterms):

$$\begin{aligned}
 f_4(a, b, c) &= \sum m(4) + \sum d(5, 6, 7) \\
 f_3(a, b, c) &= \sum m(3) + \sum d(5, 6, 7) \\
 f_2(a, b, c) &= \sum m(2) + \sum d(5, 6, 7) \\
 f_1(a, b, c) &= \sum d(5, 6, 7) \\
 f_0(a, b, c) &= \sum m(1, 3) + \sum d(5, 6, 7)
 \end{aligned}$$

o bien,

$$f_4(a, b, c) = \prod M(0, 1, 2, 3) \prod D(5, 6, 7)$$

$$\begin{aligned}
 f_3(a, b, c) &= \prod M(0, 1, 2, 4) \prod D(5, 6, 7) \\
 f_2(a, b, c) &= \prod M(0, 1, 3, 4) \prod D(5, 6, 7) \\
 f_1(a, b, c) &= \prod M(0, 1, 2, 3, 4) \prod D(5, 6, 7) \\
 f_0(a, b, c) &= \prod M(0, 2, 4) \prod D(5, 6, 7)
 \end{aligned}$$

Una indiferencia puede ser considerada como salida 0 ó 1 según convenga. Por ejemplo, en la función f_0 , podemos considerar $f_0(1, 0, 1) = 1$, $f_0(1, 1, 0) = 0$ y $f_0(1, 1, 1) = 1$, entonces desarrollando la función en forma de suma de minterms:

$$f_0(a, b, c) = \sum m(1, 3, 5, 7) = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}bc + a\bar{b}c + abc = \bar{a}c(\bar{b} + b) + ac(\bar{b} + b) = c(\bar{a} + a) = c$$

Con este ejemplo podemos ver que las indiferencias van a ser muy útiles a la hora de simplificar las expresiones algebraicas de una función.

2.4. MINIMIZACIÓN DE FUNCIONES

Minimizar una función es obtener la expresión más simplificada posible para dicha función. En general, la función minimizada no es única. Una expresión de una función en forma de suma de productos será mínima si:

- No existe otra expresión de la función con menor número de términos producto.
- Cualquier otra expresión con igual número de términos producto tendrá más variables dentro de los productos.

Si la expresión es un producto de términos suma será mínima si cumple las condiciones anteriores cambiando la palabra producto por suma.

Vamos a ver ahora una serie de conceptos que nos ayudarán a obtener las expresiones mínimas de las funciones.

Definición 2.5 *Dos minterms (maxterms) constituyen un implicante de primer orden si la expresión de uno de ellos puede obtenerse a partir de la del otro negando una sola variable.*

La suma de los minterms que componen un implicante es simplificable (lo mismo que el producto de los maxterms). Ejemplo: Para funciones de tres variables: $\bar{a}\bar{b}c$ y $\bar{a}bc$. Suma: $\bar{a}\bar{b}c + \bar{a}bc = \bar{a}c(\bar{b} + b) = \bar{a}c$ (implicante $\bar{a}c$).

Definición 2.6 *Dos implicantes de primer orden constituyen un implicante de segundo orden si la expresión de uno de ellos puede obtenerse a partir del otro negando una sola variable.*

Ejemplo: $\bar{a}\bar{b}c$ y $\bar{a}bc$ (implicante $\bar{a}c$), $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ y $\bar{a}b\bar{c}$ (implicante $\bar{a}\bar{c}$). Suma: $\bar{a}c + \bar{a}\bar{c} = \bar{a}(c + \bar{c}) = \bar{a}$ (implicante de segundo orden \bar{a}).

Definición 2.7 *Dos implicantes de segundo orden constituyen un implicante de tercer orden si la expresión de uno de ellos puede obtenerse a partir del otro negando una variable.*

Ejemplo: $\bar{a}\bar{b}c$, $\bar{a}bc$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ y $\bar{a}b\bar{c}$ (implicante \bar{a}), $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$, $\bar{a}bc$, $\bar{a}b\bar{c}$ y abc (implicante a). Suma: $\bar{a} + a = 1$.

Esto se generaliza sin dificultad para funciones de cualquier número de variables y para implicantes de cualquier orden, es decir, dos implicantes de orden n constituyen uno de orden $n+1$ si la expresión de uno de ellos se puede obtener a partir del otro negando una variable. Es conveniente notar que un implicante de primer orden simplifica una variable, uno de segundo dos, uno de tercero tres, etc. También es importante recalcar que un implicante de orden n está compuesto por 2^n minterms (maxterms), es decir, uno de primer orden está formado por dos minterms (maxterms), uno de segundo por cuatro, uno de tercero por ocho, etc.

2.4.1. Mapas de Karnaugh

Un mapa de Karnaugh es un diagrama formado por cuadrados, cada uno de los cuales representa una de las posibles combinaciones de las variables de la función. En cada cuadrado representaremos el valor que toma la función para la combinación de variables que le corresponde, y como hay una correspondencia directa uno a uno entre los cuadrados y las distintas combinaciones de entrada, el mapa de Karnaugh va a ser otra forma de especificar una función (es un diagrama visual de la tabla de verdad).

Los mapas de Karnaugh para funciones de 2, 3, 4 y 5 variables son los ilustrados en la figura 2.3. Hemos indicado el minterm (maxterm) que correspondería a cada casilla.

Importante: el orden para los pares de variables es obligatoriamente (00, 01, 11, 10) y para un grupo de tres variables (000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100).

En el caso de querer obtener una expresión mínima como suma de términos producto, en el mapa colocaremos los unos de la función, además de las indiferencias, omitiendo los ceros. Si lo que nos proponemos es calcular la expresión mínima como producto de términos suma, entonces pondremos los ceros y las indiferencias, excluyendo los unos.

El segundo paso en la minimización es localizar los implicantes de la función en el mapa de Karnaugh. A continuación mostramos unos ejemplos de implicantes obtenidos a partir de minterms, para funciones de distinto número de variables. Los implicantes deben estar formados por celdas adyacentes y pueden contener tanto unos como indiferencias (deben contener al menos un 1). Los implicantes de primer orden ocupan dos casillas adyacentes. La adyacencia de dos casillas puede ser horizontal o vertical, nunca diagonal.

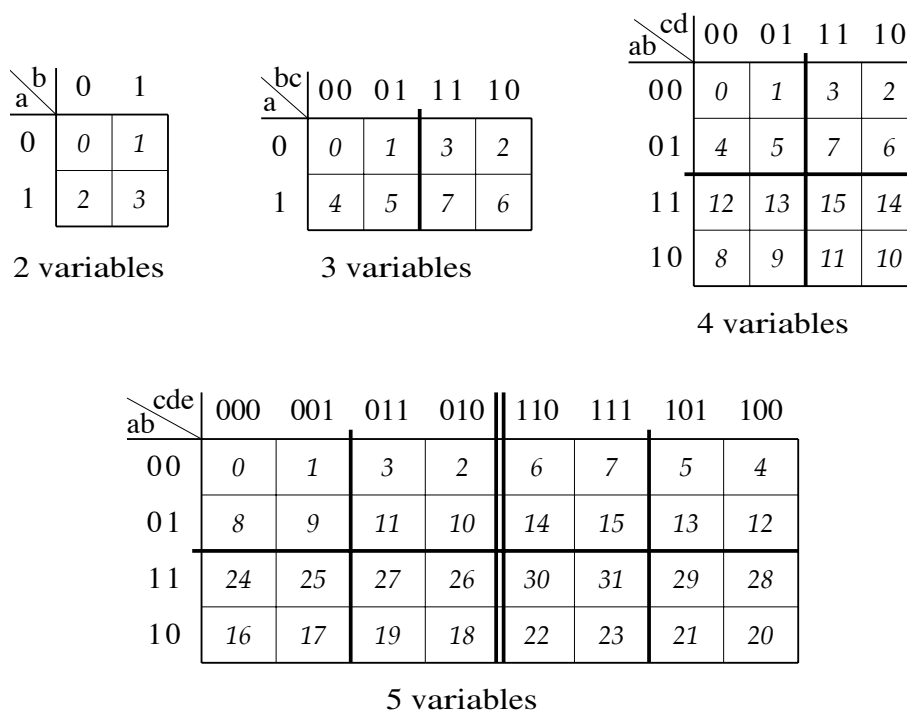


Figura 2.3: Mapas de Karnaugh para 2, 3, 4 y 5 variables.

Las casillas de la primera y última fila son adyacentes y lo mismo ocurre con la primera y última columna. Un implicante de segundo orden está formado por dos implicantes de primer orden adyacentes, uno de tercero por dos de segundo adyacentes, etc.

a) Dos variables: En la figura 2.4 tenemos en el primer mapa dos minterms que no son adyacentes y, por tanto, no forman un implicante de primer orden. En los otros mapas sí tenemos minterms adyacentes, obteniéndose los siguientes implicantes:

$$i_1(a, b) = \sum m(0, 1) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}b = \bar{a}(\bar{b} + b) = \bar{a}$$

$$i_2(a, b) = \sum m(1, 3) = \bar{a}\bar{b} + ab = b(\bar{a} + a) = b$$

$$i_3(a, b) = \sum m(0, 1, 2, 3) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}b + a\bar{b} + ab = \bar{a}(\bar{b} + b) + a(\bar{b} + b) = \bar{a} + a = 1$$

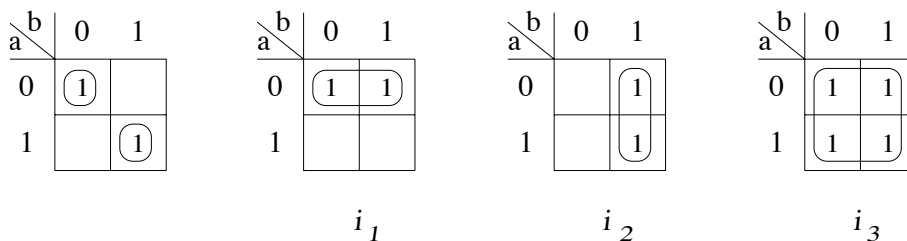


Figura 2.4: Ejemplos de implicantes de orden 1 (2 celdas adyacentes) y orden 2 (2 implicantes de orden 1 adyacentes) para mapas de dos variables.

28TEMA 2. REPRESENTACIÓN Y TRATAMIENTO DE LOS SISTEMAS DIGITALES

Existe un forma simplificada de obtener la expresión de los implicantes. Primero se buscan las variables que tomen el mismo valor para todas las casillas del implicante. A continuación, si la variable es cero, en la expresión del implicante aparecerá la variable complementada, y si es 1 aparecerá la variable sin complementar.

$$i_1 : a = 0 \text{ en las dos casillas. } i_1(a, b) = \bar{a}$$

$$i_2 : b = 1 \text{ en las dos casillas. } i_2(a, b) = b$$

$$i_3 : \text{ No hay variables que tomen el mismo valor en las cuatro casillas. } i_3(a, b) = 1$$

b) Tres variables:

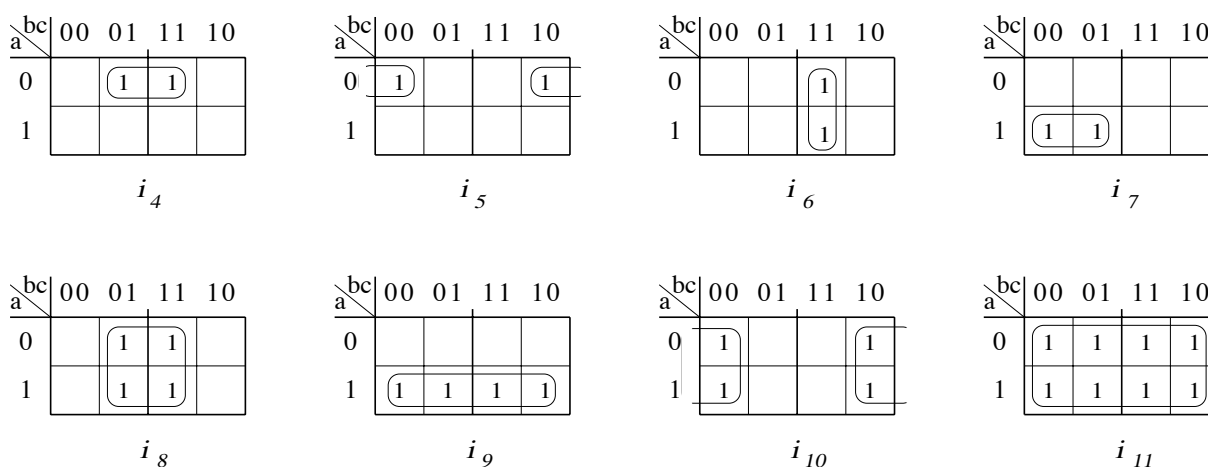


Figura 2.5: Ejemplos de implicantes de órdenes 1, 2 y 3 para mapas de tres variables.

En la figura 2.5 se puede ver los siguientes ejemplos de implicantes de órdenes 1, 2 y 3:

$$i_4: a = 0, c = 1. i_4(a, b, c) = \bar{a}c$$

$$i_5: a = 0, c = 0. i_5(a, b, c) = \bar{a}\bar{c}$$

$$i_6: b = 1, c = 1. i_6(a, b, c) = bc$$

$$i_7: a = 1, b = 0. i_7(a, b, c) = a\bar{b}$$

$$i_8: c = 1. i_8(a, b, c) = c$$

$$i_9: a = 1. i_9(a, b, c) = a$$

$$i_{10}: c = 0. i_{10}(a, b, c) = \bar{c}$$

$$i_{11}: i_{11}(a, b, c) = 1$$

c) Cuatro variables:

En la figura 2.6 se puede ver los siguientes ejemplos de implicantes de órdenes 1, 2, 3 y 4:

$$i_{12}: b = 0, c = 0, d = 1. i_{12}(a, b, c, d) = \bar{b}\bar{c}d$$

$$i_{13}: a = 0, b = 1, d = 0. i_{13}(a, b, c, d) = \bar{a}b\bar{d}$$

$$i_{14}: a = 0, b = 1, d = 1. i_{14}(a, b, c, d) = \bar{a}bd$$

$$i_{15}: b = 1, c = 1, d = 1. i_{15}(a, b, c, d) = bcd$$

$$i_{16}: c = 1, d = 1. i_{16}(a, b, c, d) = cd$$

$$i_{17}: b = 1, d = 1. i_{17}(a, b, c, d) = bd$$

$$i_{18}: b = 0, d = 0. i_{18}(a, b, c, d) = \bar{b}\bar{d}$$

$$i_{19}: b = 1, d = 0. i_{19}(a, b, c, d) = b\bar{d}$$

$$i_{20}: a = 1, d = 0. i_{20}(a, b, c, d) = a\bar{d}$$

$$i_{21}: b = 1. i_{21}(a, b, c, d) = b$$

$$i_{22}: d = 0. i_{22}(a, b, c, d) = \bar{d}$$

$$i_{23}: i_{23}(a, b, c, d) = 1$$

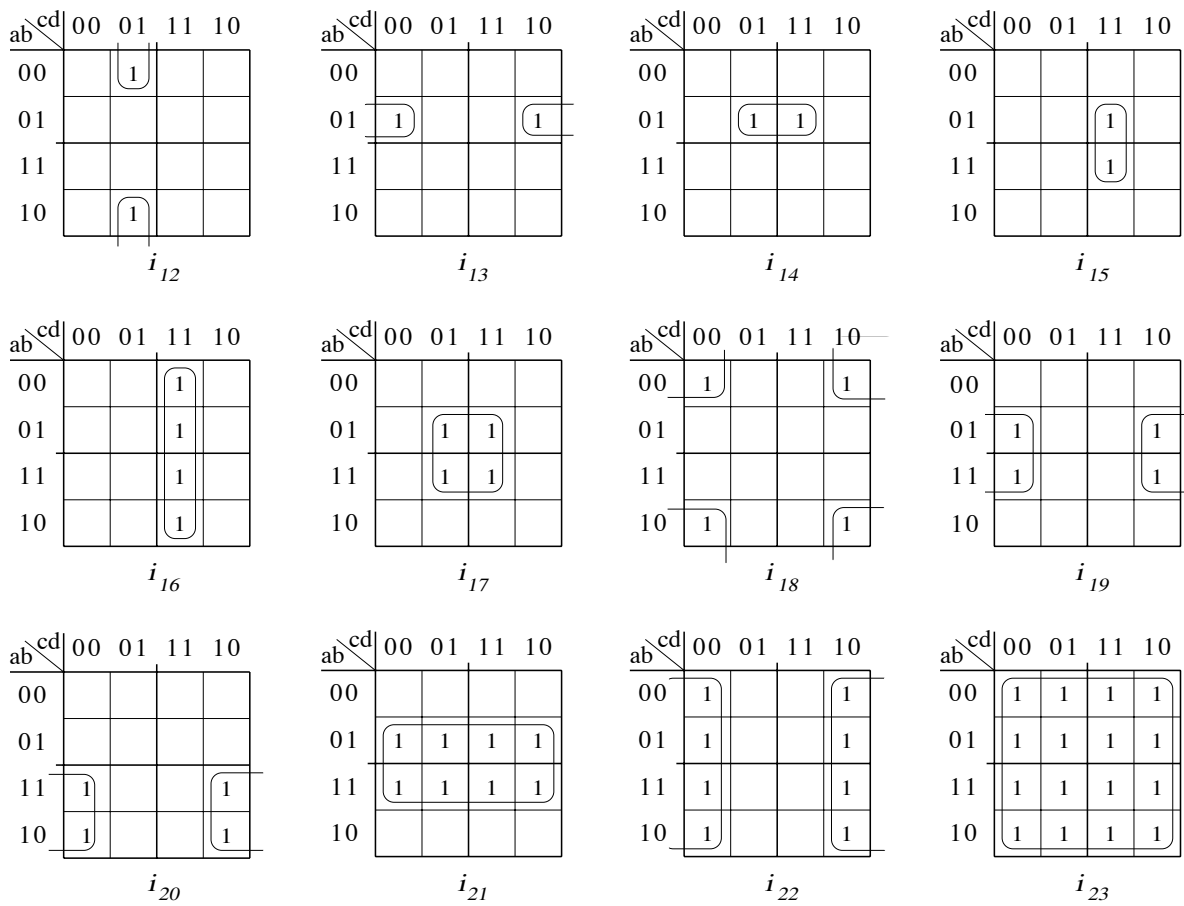


Figura 2.6: Ejemplos de implicantes de orden 1, 2, 3 y 4 para mapas de cuatro variables.

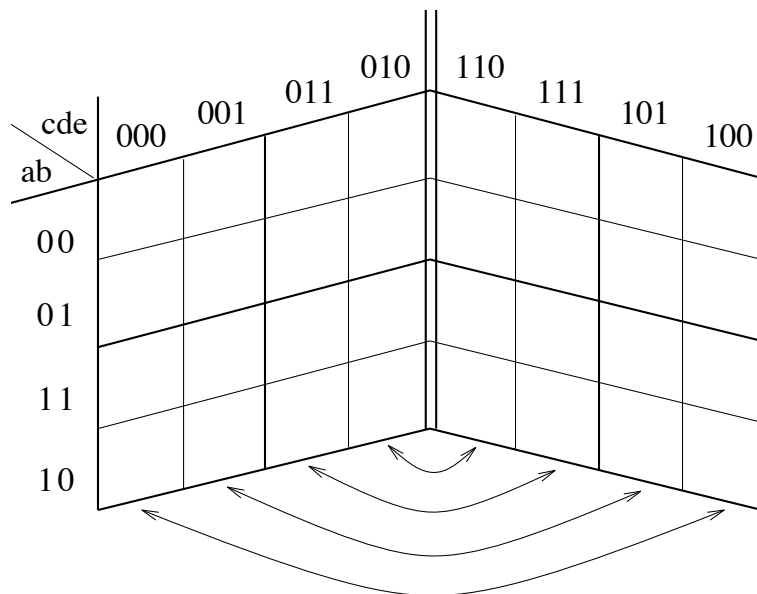


Figura 2.7: En un mapa de 5 variables las celdas simétricas respecto del eje central son adyacentes.

d) Cinco variables:

Los mapas para funciones de 5 variables se construyen a partir de mapas de 4 variables. Las celdas simétricas respecto al eje central representan también adyacencias, como se indica en la figura 2.7.

2.4.2. Minimización en suma de productos mediante mapas de Karnaugh

El objetivo a seguir es incluir todos los unos del mapa con el menor número de implicantes y del mayor orden posible. Las indiferencias ayudan a completar los implicantes. No importa que los implicantes se solapen unos a otros, lo que si interesa es no incluir implicantes que no son necesarios.

El procedimiento a seguir puede resumirse en las siguientes reglas:

1. Extraer todos los implicantes de cualquier orden que no estén incluidos en otros y que contengan al menos un 1 (se llaman **implicantes primos** de la función). Empezar por los de mayor orden.
2. Escoger de los implicantes primos aquellos que contengan unos en exclusiva (son los **implicantes primos esenciales** de la función).
3. En caso de que quede algún 1 por cubrir, escoger el menor número de implicantes (y del mayor orden posible) necesario para cubrir todos los unos.

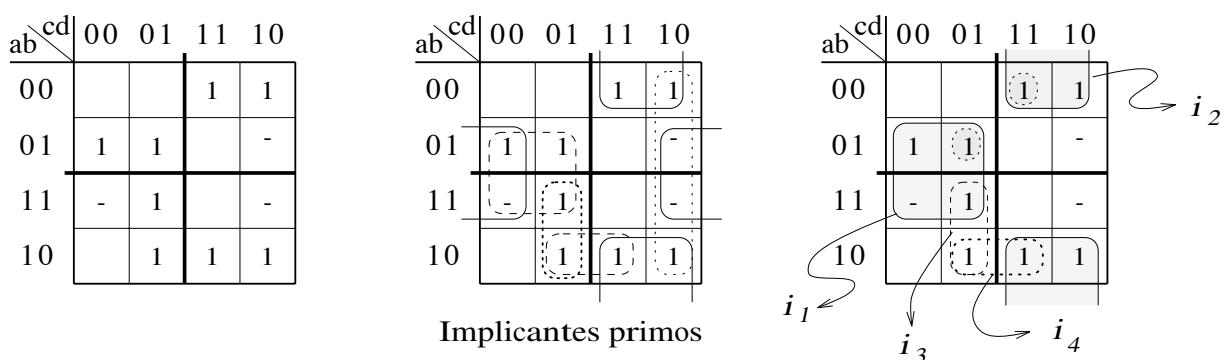


Figura 2.8: Ejemplo de minimización como suma de productos en un mapa de Karnaugh de 4 variables.

La expresión de la función se obtiene a partir de la expresión de los implicantes escogidos en los puntos 2 y 3. En la figura 2.8 podemos ver un ejemplo de aplicación de este procedimiento a la siguiente función:

$$f_1(a, b, c, d) = \sum m(2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 13) + \sum d(6, 12, 14)$$

Las expresiones de los implicantes primos esenciales son:

$$i_1: b = 1, c = 0. i_1 = b\bar{c} \qquad i_2: b = 0, c = 1. i_2 = \bar{b}c$$

Una vez seleccionados los implicantes primos esenciales queda un único 1 por cubrir. Hay dos implicantes primos no esenciales que lo cubren, cuyas expresiones son:

$$i_3: a = 1, c = 0, d = 1. i_3 = a\bar{c}d \qquad i_4: a = 1, b = 0, d = 1. i_4 = a\bar{b}d$$

Así tendremos dos expresiones alternativas para la función, que son:

- Posibilidad 1: implicantes i_1, i_2 e i_3 . $f_1(a, b, c, d) = b\bar{c} + \bar{b}c + a\bar{c}d$
- Posibilidad 2: implicantes i_1, i_2 e i_4 . $f_1(a, b, c, d) = b\bar{c} + \bar{b}c + a\bar{b}d$

Vamos a ver un ejemplo de minimización de una función de cinco variables:

$$f_2(a, b, c, d, e) = \sum m(2, 9, 10, 11, 15, 21, 25, 29, 31) + \sum d(6, 13, 16, 17, 27)$$

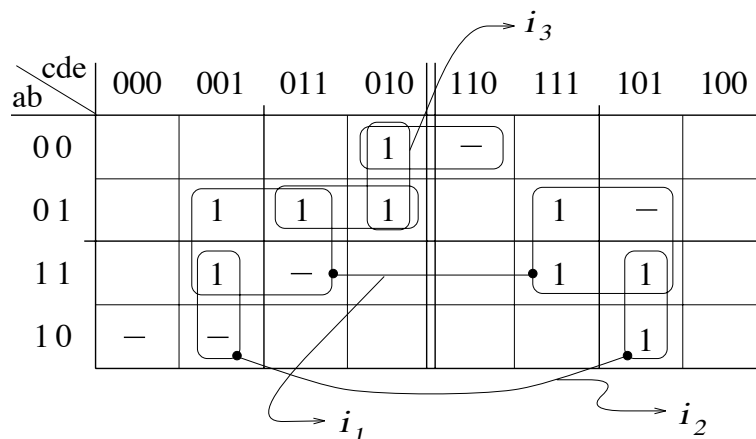


Figura 2.9: Ejemplo de minimización como suma de productos en un mapa de Karnaugh de 5 variables.

En la figura 2.9 vemos que los implicantes primos esenciales son $i_1 = be$ e $i_2 = a\bar{d}e$. Para cubrir el resto de unos la opción con el menor número de términos producto es tomar el implicante primo $i_3 = \bar{a}\bar{c}d\bar{e}$. Por tanto la expresión mínima es:

$$f_2(a, b, c, d, e) = be + a\bar{d}e + \bar{a}\bar{c}d\bar{e}$$

2.4.3. Minimización en producto de sumas mediante mapas de Karnaugh

El método para minimizar la función obteniendo una expresión producto de sumas es totalmente equivalente al descrito anteriormente. Las modificaciones que han de realizarse son las siguientes:

- Colocar en el mapa de Karnaugh los ceros y las indiferencias de la función.
- Los implicantes estarán formados por celdas adyacentes que pueden contener tanto ceros como indiferencias (deben contener al menos un cero).
- La obtención de la expresión de cada implicante es la siguiente: por cada variable que no cambie en un implicante, si es 0 tomar la variable tal cual y si es 1 tomar la variable negada. Sumar las variables obtenidas de esta forma.

Veamos el siguiente ejemplo de tres variables:

$$g_1(a, b, c) = \sum m(1, 2, 3, 4) + \sum d(6) = \prod M(0, 5, 7) \prod D(6)$$

En la figura 2.10 observamos que existen tres implicantes primos (i_1 es un minterm, pero también lo podemos considerar como un implicante de orden cero). De ellos son implicantes primos esenciales i_1 e i_2 , que cubren todos los ceros. La expresión de los implicantes es:

$$i_1: a = 0, b = 0, c = 0. \quad i_1 = a + b + c \quad i_2: a = 1, c = 1. \quad i_2 = \bar{a} + \bar{c}$$

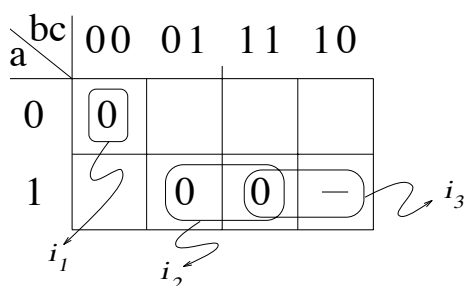


Figura 2.10: Minimización como producto de términos suma en un mapa de Karnaugh de 3 variables.

Entonces la expresión mínima será: $g_1(a, b, c) = (a + b + c)(\bar{a} + \bar{c})$

Para finalizar, veamos un último ejemplo de minimización en forma de producto de sumas de una función de cuatro variables. Estudiemos la siguiente función:

$$\begin{aligned} g_2(a, b, c, d) &= \sum m(2, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 15) + \sum d(5, 14) \\ &= \prod M(0, 1, 3, 4, 10, 11) \prod D(5, 14) \end{aligned}$$

Se observa en el figura 2.11 que sólo hay un implicante primo esencial que es $i_1 = a + c$ ($a = 0, c = 0$). Para cubrir el resto de ceros tenemos los siguientes implicantes primos:

$$i_2: a = 0, b = 0, d = 1. \quad i_2 = a + b + \bar{d}$$

$$i_3: b = 0, c = 1, d = 1. \quad i_3 = b + \bar{c} + \bar{d}$$

$$i_4: a = 1, b = 0, c = 1. \quad i_4 = \bar{a} + b + \bar{c}$$

$$i_5: a = 1, c = 1, d = 0. \quad i_5 = \bar{a} + \bar{c} + d$$

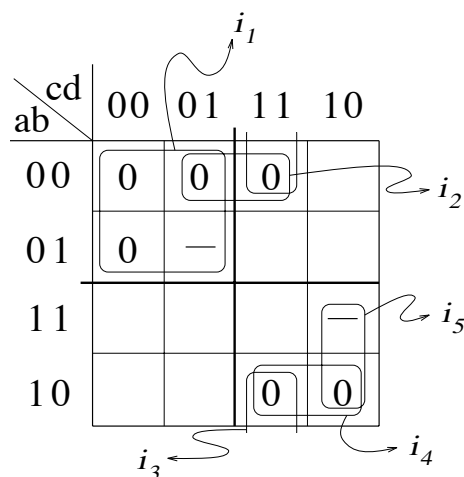


Figura 2.11: Minimización como producto de términos suma en un mapa de Karnaugh de 4 variables.

Si cogemos i_2 , con i_4 cubriríamos el resto de ceros. Sin embargo, el maxterm 3 también puede ser cubierto por i_3 , quedándonos solamente por cubrir el maxterm 10, para lo cual podríamos coger tanto el implicante i_4 como el i_5 . De esta forma tenemos tres expresiones mínimas alternativas:

- Posibilidad 1: implicantes i_1, i_2, i_4 . $g_2(a, b, c, d) = (a + c)(a + b + \bar{d})(\bar{a} + b + \bar{c})$
- Posibilidad 2: implicantes i_1, i_3, i_4 . $g_2(a, b, c, d) = (a + c)(b + \bar{c} + \bar{d})(\bar{a} + b + \bar{c})$
- Posibilidad 3: implicantes i_1, i_3, i_5 . $g_2(a, b, c, d) = (a + c)(b + \bar{c} + \bar{d})(\bar{a} + \bar{c} + d)$

EJERCICIOS

2.1. Expresar las siguientes funciones como suma de minterms y como producto de max-terms:

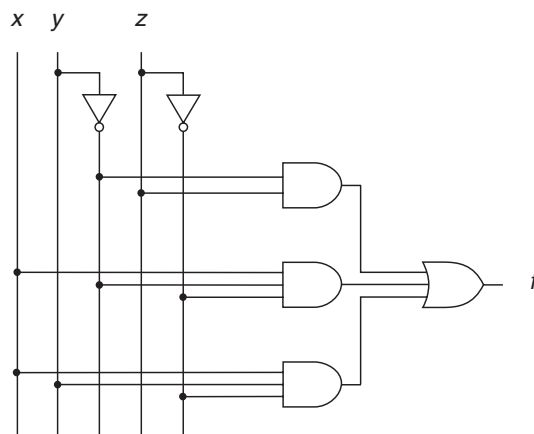
I) $f_1(a, b, c, d) = \bar{a}bc + \bar{a}b + a\bar{b}\bar{c}$

II) $f_2(x, y, z) = xy + \bar{x}z$

III) $f_3(a, b, c, d) = d(\bar{a} + b) + \bar{b}d$

IV) $f_4(w, x, y, z) = \bar{y}z + wx\bar{y} + wx\bar{z} + \bar{w}\bar{x}z$

2.2. A partir del siguiente circuito,

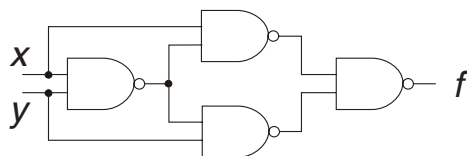


I) Obtener la expresión lógica asociada a la salida.

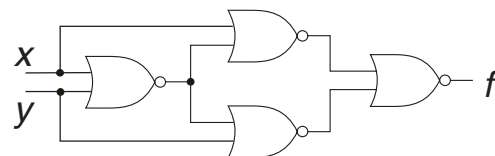
II) Convertir dicha expresión en suma de minterms.

III) Convertir la expresión en producto de maxterms.

2.3. Demostrar que los circuitos de la figura 2.12 equivalen a una puerta EXOR y a una NEXOR.



a)



b)

Figura 2.12: a) Equivalente EXOR; b) equivalente NEXOR.

2.4. De un conjunto de 5 elementos $\{A,B,C,D,E\}$ ha de seleccionarse un subconjunto que verifique las siguientes condiciones:

- I) Debe incluirse a A o a B, pero no a ambos.
- II) Debe incluirse a C o a E o a ambos.
- III) Debe incluirse a A y a C juntos, o a ninguno de los dos.
- IV) Si D es incluido, debe incluirse también a B.

Construir la función que detecte si un determinado subconjunto es válido.

2.5. Minimizar las siguientes funciones como sumas de términos producto:

- I) $f_1(a, b, c, d) = \sum m(0, 2, 6, 11, 13, 14) + \sum d(1, 3, 9)$
- II) $f_2(a, b, c, d) = \sum m(0, 2, 4, 5, 13)$
- III) $f_3(a, b, c, d) = \sum m(3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15) + \sum d(4, 9)$
- IV) $f_4(a, b, c, d) = \sum m(0, 1, 2, 4, 8, 9, 10) + \sum d(3, 5)$
- V) $f_5(a, b, c, d) = \sum m(0, 1, 8) + \sum d(2, 5, 7, 10, 11, 14, 15)$
- VI) $f_6(a, b, c, d) = \sum m(0, 1, 2, 3, 8, 14) + \sum d(4, 5, 6, 7, 9)$
- VII) $f_7(a, b, c, d) = \sum m(1, 4, 5, 10, 11, 12, 13) + \sum d(3, 6, 14)$
- VIII) $f_8(a, b, c, d) = \sum m(0, 2, 4, 8, 10) + \sum d(1, 9)$
- IX) $f_9(a, b, c, d, e) = \sum m(0, 4, 9, 16, 20, 25, 29) + \sum d(2, 6, 18, 22)$
- X) $f_{10}(a, b, c, d, e) = \sum m(1, 6, 17, 18, 19, 22, 23) + \sum d(2, 3, 27, 31)$

2.6. Minimizar las funciones anteriores como productos de términos suma.

2.7. Diseñar una función que valga 1 cuando la entrada es suma de dos potencias de dos distintas. Los posibles valores de las entradas están comprendidos entre 0 y 10, ambos inclusive.

2.8. Diseñar un detector de números primos para números comprendidos entre el 0 y el 24. Considerar el 0 como número no primo. Basar el diseño en la obtención de una expresión mínima para la salida en forma de suma de productos.

2.9. Realiza la minimización de la función f_1 como suma de términos producto y la de las funciones f_2 y f_3 como producto de términos suma, mediante mapas de Karnaugh. Da todas las posibilidades **mínimas**. La variable a es la de más peso.

- I) $f_1(a, b, c, d) = \sum m(0, 2, 7, 9, 11) + \sum d(1, 3, 5, 6, 8, 14)$
- II) $f_2(a, b, c, d) = \sum m(0, 10, 13, 14) + \sum d(2, 4, 9)$
- III) $f_3(a, b, c, d, e) = \sum m(2, 6, 7, 9, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 23, 29, 31) + \sum d(12, 17, 19, 28, 30)$

2.10. Realiza la minimización de la función f_1 como suma de términos producto y la de las funciones f_2 y f_3 como producto de términos suma, mediante mapas de Karnaugh. Escribe todas las posibilidades **mínimas**. La variable a es la de mayor peso.

36TEMA 2. REPRESENTACIÓN Y TRATAMIENTO DE LOS SISTEMAS DIGITALES

$$\text{I) } f_1(a, b, c, d) = \sum m(1, 6, 12, 13, 14) + \sum d(4, 7, 9, 10)$$

$$\text{II) } f_2(a, b, c, d) = \sum m(0, 1, 5, 7, 15) + \sum d(2, 6, 14)$$

$$\text{III) } f_3(a, b, c, d, e) = \sum m(0, 3, 4, 8, 10, 12, 14, 15, 17, 18, 20, 24, 30) \\ + \sum d(1, 2, 5, 16, 19, 26, 28, 31)$$

2.11. Realiza la minimización de la función f_2 como suma de términos producto y la de las funciones f_1 y f_3 como producto de términos suma, mediante mapas de Karnaugh. Escribe todas las posibilidades **mínimas**. La variable a es la de mayor peso.

$$\text{I) } f_1(a, b, c, d) = \sum m(2, 4, 6, 8, 11, 12, 13) + \sum d(3, 5, 7, 9)$$

$$\text{II) } f_2(a, b, c, d) = \sum m(2, 7, 8, 10, 11) + \sum d(0, 3, 5, 6, 9, 15)$$

$$\text{III) } f_3(a, b, c, d, e) = \prod M(1, 2, 5, 9, 10, 25, 27) \cdot \prod D(0, 6, 8, 13, 14, 17, 24)$$