COMPUTACIÓN NUMÉRICA

Boletín III. **Resolución numérica de ecuaciones no lineales**

1. Considera la ecuación $2^x = 3$.
   (a) Comprueba que tiene una única raíz real.
   (b) Calcula las tres primeras iteraciones del método de *regula falsi* partiendo del intervalo $[1, 2]$.

2. Justifica la existencia de una solución en el intervalo $[1, 2]$ de la ecuación:
$$e^x + 2^{-x} + 2\cos x = 6\,.$$
   Determina el número de iteraciones necesarias para aproximar la raíz, mediante el método de dicotomía, con un error inferior a 10^{-5} y calcula las dos primeras iteraciones.

3. Dos partículas se mueven en el plano XY con trayectorias respectivas definidas para los valores positivos de x de la siguiente forma:
$$y_1(x) = x^2 - 1 \qquad\qquad y_2(x) = \sin x\,.$$
   Se pretende aproximar el punto de corte $(\alpha, y_1(\alpha)) = (\alpha, y_2(\alpha))$ de las trayectorias.
   (a) Encuentra un intervalo de longitud unidad que contenga a α.
   (b) Plantea un método de iteración funcional que converja a α en el intervalo determinado en el apartado anterior.
   (c) Acota el error cometido al aproximar α mediante x_4, usando el algoritmo del apartado anterior y partiendo de $x_0 = 1.5$.
   (d) Calcula el número de iteraciones necesario para aproximar α con un error inferior a 10^{-4}.

4. Se considera la ecuación $\ln(1 + x)^x = 1 - 2x$.
   (a) Mediante un algoritmo de iteración funcional, construye una sucesión que, partiendo de $x_0 \in [0, 1]$, converja a la raíz de la ecuación.
   (b) Determina el número de iteraciones necesarias para aproximar la raíz mediante el método anterior con un error inferior a 10^{-4} partiendo de $x_0 = 0$, y calcula las dos primeras iteraciones.

5. (**JUN98**) Sea $g : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = 4 - x + \ln x$.
   (a) Determina una función f cuyos ceros sean puntos fijos de g.
   (b) Justifica la existencia de un único punto fijo de g en el intervalo $I = [2, 3]$, y la convergencia del método de iteración funcional.
   (c) Dado $x_0 = e$, acota el error cometido al aproximar el punto fijo de g mediante x_5.

6. (a) Dado $c > 0$, escribe el método de Newton–Raphson para aproximar $\sqrt{c}$. Obtén condiciones sobre a y b para que el método converja globalmente en el intervalo $[a, b]$. Calcula tres iteraciones para aproximar $\sqrt{2}$ tomando $x_0 = 1$.

   (b) Escribe el método de Newton–Raphson para aproximar $3^{\frac{1}{3}}$ partiendo de $x_0 = 1$.

7. Se desea aproximar, mediante el método de iteración funcional, el punto fijo de $g(x) = \sqrt{3+x}$.

   (a) Verifica las condiciones de convergencia global en el intervalo $[0, 1000]$. Calcula el número de iteraciones necesarias para aproximar el punto fijo con un error inferior a 10^{-4} partiendo de $x_0 = 20$.

   (b) Partiendo de $x_0 = 0$, calcula x_2 y x_4. Acota el error cometido en cada caso.

   (c) Indica cómo se utiliza el método para aproximar el número:

$$\beta = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots}}}$$

   Halla analíticamente el valor de β y verifica que se cumplen las acotaciones de error obtenidas para x_2 y x_4.

8. (**SEP01**) Sean las funciones f y g dadas por $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ y $g(x) = 2x^3 + x - 2$.

   (a) Analiza la convergencia del método de Newton–Raphson aplicado a la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo $[0, 3]$. Realiza dos iteraciones a partir de $x_0 = 1$.

   (b) Realiza dos iteraciones del algoritmo de *regula falsi* aplicado a la ecuación $g(x) = 0$, partiendo de $a_0 = 0$ y $b_0 = 1$. ¿Converge la sucesión construida?

9. Sea $h(x) = \dfrac{1}{2} - \sqrt{1-x}, \quad x \in I = \left[0, \dfrac{15}{16}\right]$.

   (a) Demuestra que $h(x) = 0$ tiene una raíz separada en I.

   (b) Dada $\ell(x) = x - \dfrac{h(x)}{h'(15/16)}$, y sabiendo que $h'(0) \leq h'(x) \leq h'(15/16)$, $\forall x \in I$, comprueba que existe $L \in (0, 1)$ tal que $0 \leq \ell'(x) \leq L$.

   (c) Sabiendo que $\ell(I) \subset I$, estudia la convergencia global del método iterativo:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{h(x_k)}{h'(15/16)}\,, \qquad k = 0, 1, \dots$$

10. Sea $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 2x - 5 + \ln x$.

   (a) Demuestra que existe un único valor $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha) = 0$.

   (b) Localiza un intervalo de la forma $[n, n+1]$, con n natural, que contenga a α.

   (c) Para aproximar α, se plantea el algoritmo:

$$\begin{cases} x_0 \in [n, n+1] \\ x_{k+1} = x_k - \beta f(x_k)\,, \quad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

   Analiza la convergencia del algoritmo en el intervalo determinado en el apartado (a) para los valores $\beta = 1$ y $\beta = 0.2$. Para $\beta = 0.2$, ¿es convergente la sucesión generada a partir de $x_0 = 1.5$? Calcula, en este caso, x_1 y acota el error que se comete al aproximar α mediante x_2.

11. (**SEP00**) Se desea aproximar el punto de abscisa $\alpha \in [-1,0]$ en el que $f(x) = e^x$ y $g(x) = \lambda - x^2$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) tienen la misma pendiente.

    (a) Comprueba que el problema tiene una única solución $\alpha \in [-1,0]$.

    (b) Partiendo de $x_0 = 0$, aproxima α con un error inferior a 10^{-3} mediante el método de punto fijo, justificando previamente la convergencia del método en el intervalo $[-1,0]$.

12. (**JUN01**) En 1225, Leonardo de Pisa estudió la ecuación $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$. Para aproximar la única raíz α en el intervalo $[0,2]$, planteamos el siguiente método iterativo:

$$\begin{cases} x_0 \in [0,2] \\ x_{k+1} = g(x_k) \end{cases} \qquad \text{con} \quad g(x) = \frac{20 + 10x - 2x^2 - x^3}{20}$$

    (a) Analiza la convergencia del algoritmo en el intervalo $[0,2]$.

    (b) Calcula el número de iteraciones necesarias para aproximar la solución con un error absoluto inferior a 10^{-3}, partiendo de $x_0 = 1$. Calcula las dos primeras iteraciones y acota el error cometido. Justifica si la sucesión $(x_k)_k$ converge a la raíz de la ecuación.

13. (**DIC01**) Se sabe que la función F, dada por $F(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - \ln x$, tiene un mínimo relativo, $x_{\min}$, en el intervalo $(1,3)$.

    (a) ¿Es posible aproximar $x_{\min}$ utilizando el algoritmo de iteración funcional con $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$, para $x \in [1,3]$? Justifica tu respuesta. Si la respuesta anterior es afirmativa, aplica el método para aproximar $x_{\min}$ con un error menor que $\frac{1}{7}$ partiendo de $x_0 = 2$.

    (b) Utiliza el algoritmo de dicotomía, partiendo de $x_0 = 1$ y $x_1 = 3$, para aproximar $x_{\min}$ con un error menor que $\frac{1}{7}$.

14. (**SEP02**)

    (a) Demuestra que la ecuación $x^4 - 4\,x^3 - 1 = 0$ tiene una única raíz, α, en el intervalo $[4,5]$.

    (b) Plantea el método de Newton–Raphson para resolver la ecuación del apartado anterior, y estudia su convergencia en el intervalo $[4,5]$. Partiendo de $x_0 = 4$, obtén la aproximación x_1. ¿Es convergente la sucesión generada a partir de $x_0 = 6$? En caso afirmativo, indica cuál es el orden de convergencia.

    (c) Determina si el algoritmo:

$$\begin{cases} x_0 \in [4,5] \\ x_{k+1} = 4 + \dfrac{1}{x_k^3}\,, \quad k = 0,1,\ldots \end{cases}$$

    es convergente a la raíz α. Calcula x_2 a partir de $x_0 = 4$ y acota el error cometido en la segunda iteración.

15. (**DIC02**) Para determinar las horas de tiempo de cálculo que invierte un ordenador en realizar cierta simulación numérica es preciso resolver la ecuación: $t\,(e^t + 1) = 1$.

    (a) Plantea el método de iteración funcional aplicado a la función $g(t) = (e^t + 1)^{-1}$. Estudia su convergencia en el intervalo $[0,1]$. Partiendo de $t_0 = 0$, obtén el valor de t_2 y acota el error cometido al aproximar la solución mediante t_2. ¿Cuál es el orden de convergencia de la sucesión obtenida?

(b) Plantea el método de Newton–Raphson para la función $f(t) = t\,(e^t + 1) - 1$. Estudia su convergencia en el intervalo $[0\,,\,0.5]$. Partiendo de $t_0 = 0$, obtén el valor de t_2. ¿Cuál es el orden de convergencia de la sucesión obtenida?

16. (**JUN03**) Se desean aproximar las soluciones de la ecuación $(5 - x)e^x = 5$.

   (a) Prueba que existe una única solución, α, en el intervalo $[1, 5]$. Aproxima α mediante el valor x_1 obtenido por el método de *regula falsi* partiendo de $a_0 = 1$ y $b_0 = 5$. Deja indicado, si fuera necesario, el último cálculo.

   (b) ¿Es posible aproximar α aplicando el método de iteración funcional sobre la función g_1 dada por $g_1(x) = \ln\left(\dfrac{5 + xe^x}{5}\right)$ en $I = [1, 5]$? Justifica tu respuesta.

   (c) ¿Es posible aproximar α aplicando el método de iteración funcional sobre la función g_2 dada por $g_2(x) = 5 - 5e^{-x}$ en $I = [1, 5]$? Justifica tu respuesta.

   (d) Sabiendo que $g_2(2) > 2$, ¿podemos aproximar α con el método de iteración funcional sobre g_2 en $I = [2, 5]$? Justifica tu respuesta.

17. (**DIC03**) Consideramos la ecuación $xe^{-x} = e^{-3}$.

   (a) Comprueba que tiene exactamente dos soluciones en $\mathbb{R}$.

   (b) Describe un método de iteración funcional para aproximar la raíz en el intervalo $[0, 1]$. Tomando $x_0 = 0$, calcula x_2 usando este método y acota el error cometido.

   (c) Analiza la convergencia global del método de Newton–Raphson en el intervalo $[0, 1]$.

   (d) Analiza la convergencia de la sucesión generada por el método de Newton–Raphson a partir de un punto en el intervalo $[2, 5]$. Calcula x_2 a partir de $x_0 = 2$.

18. (**JUN04**) Una empresa del sector informático se plantea invertir 100 000 € en un proyecto tecnológico a tres años, con la previsión de ingresar 10 000 € al final del primer año, 25 000 € al final del segundo y 94 000 € al final del tercero. La tasa interna de rendimiento de la inversión, $y \in [0, 1]$, es solución de la ecuación:

$$\frac{10\,000}{(1+y)} + \frac{25\,000}{(1+y)^2} + \frac{94\,000}{(1+y)^3} = 100\,000\,.$$

   Para aproximar el valor de y se plantea el algoritmo de Newton:

$$y_0 \in [0, 1]\,, \quad y_{k+1} = y_k - \frac{10(1+y_k)^2 + 25(1+y_k) + 94 - 100(1+y_k)^3}{20(1+y_k) + 25 - 300(1+y_k)^2}\,.$$

   Analiza la convergencia del algoritmo a la tasa interna de rendimiento. En caso de convergencia, indica razonadamente el orden de convergencia. Deduce si existe una única tasa interna de rendimiento.

19. (**SEP04**) El tiempo de cálculo de dos algoritmos numéricos viene dado por $T_1(x) = e^x$ y $T_2(x) = 3x$, respectivamente, siendo $x \in [0, 1]$ un parámetro común a ambos algoritmos.

   (a) Demuestra que existe un único parámetro, $x \in [0, 1]$, para el cual ambos algoritmos conllevan el mismo tiempo de cálculo.

   (b) Determina cuáles de las siguientes funciones tienen un único punto fijo en el intervalo $[0, 1]$, que coincide con el valor del parámetro que iguala los tiempos de cálculo:

$$g_1(x) = e^{x/3}\,, \qquad g_2(x) = \frac{e^x - x}{2}\,, \qquad g_3(x) = \ln(3x)\,.$$

(c) Analiza la convergencia global del método de iteración funcional en el intervalo $[0,1]$ para las funciones anteriores. En los casos convergentes, obtén x_2 a partir de $x_0 = 0$ y acota el error de truncamiento.

(d) Analiza la convergencia global del método de Newton–Raphson aplicado a la ecuación $f(x) = 0$, donde $f(x) = T_1(x) - T_2(x)$, en el intervalo $[0,1]$. Calcula x_2 a partir de $x_0 = 0$.

20. (**DIC04**) Sea $A > 1$. Para aproximar $\alpha = 1/A$ se considera que α es raíz de la ecuación:

$$-A\,x^2 + (3A+1)\,x - 3 = 0\,.$$

(a) Analiza la convergencia global del método de Newton–Raphson en los intervalos $[0,1]$ y $[-1,1]$. Para aproximar $\alpha = 1/6$, describe la sucesión generada por el método partiendo de $x_0 = 1/2$, obtén el valor de x_1 e indica si la sucesión $(x_k)_k$ es convergente a la solución.

(b) Analiza la convergencia a α de la sucesión:

$$\begin{cases} x_0 \in [0,1] \\ x_{k+1} = \dfrac{3}{3A+1-Ax_k}\,, \quad k = 0,1,\dots \end{cases}$$

21. (**JUN05**) Tras el análisis de inversiones de cierta operación empresarial, se deduce que el rendimiento de la inversión óptima es:

$$R(t) = \ln(1+t) - 3t + 1\,, \qquad t \geq 0$$

donde t es el tiempo en años. El banco que concede el crédito pretende estimar el instante o instantes τ en que el rendimiento de la inversión se anula.

(a) Determina si la función anterior tiene algún cero real y, si es posible, cuántos ceros reales tiene.

(b) Plantea un método de punto fijo que genere una sucesión convergente al instante τ.

(c) Determina el número de iteraciones necesario para aproximar τ, partiendo de $t_0 = 0$, con un error inferior a $\varepsilon = 1/486$.

22. (**SEP05**) Compramos un coche que al contado vale 20 000 € pagando 4 000 € al año durante 6 años. Para conocer la tasa de interés, $i_* > 0$, debemos resolver la ecuación:

$$4\,000 = 20\,000\frac{i_*(1+i_*)^6}{(1+i_*)^6 - 1}\,.$$

(a) ¿Es posible aproximar i_* aplicando el método de punto fijo a la función g, dada por

$$g(i) = \frac{(1+i)^6 - 1}{5(1+i)^6}\,,$$

en el intervalo $[0,1]$? Justifica tu respuesta.

(b) Aproxima i_* realizando un paso del método de Newton–Raphson sobre la función f dada por

$$f(i) = g(i) - i\,, \qquad \forall i \in [0,1]$$

partiendo de $i_0 = 1$.

23. (**DIC05**) Se desea obtener la abscisa α del punto en el que la recta tangente a la gráfica de la función h, dada por $h(x) = \dfrac{x-2}{e^{x-1}}$, es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

   (a) Demuestra que α es raíz separada de la ecuación $e^{x-1} + x - 3 = 0$ en el intervalo $I = [0, 2]$.

   (b) Justifica la convergencia global del método de Newton–Raphson en I. Obtén una aproximación de α en I, realizando una iteración del método de Newton–Raphson aplicado a la ecuación anterior partiendo de $x_0 = 0$.

   (c) Indica razonadamente el orden de convergencia del método anterior.

   (d) Analiza la convergencia del método de iteración funcional para aproximar α en el intervalo I usando la función de iteración dada por $g(x) = 1 + \ln(3 - x)$.

24. (**JUN06**) Se desea calcular la abscisa ($\alpha > 1$) del punto de corte de la bisectriz del primer cuadrante y la curva $y = g(x)$, donde $g(x) = x \ln(x^2 + 1)$.

   (a) Demuestra que α es solución de la ecuación $f(x) = 0$, con $f(x) = \ln(x^2 + 1) - 1$.

   (b) Plantea el método de Newton–Raphson para aproximar α partiendo de una aproximación en el intervalo $[1, 2]$. Justifica su convergencia y calcula x_1 a partir de $x_0 = 1$.
   Nota: Si lo necesitas, utiliza las aproximaciones $\ln(2) \approx 0.7$ y $\ln(5) \approx 1.6$.

25. (**SEP06**) Considera la ecuación $x^3 - 6x + 1 = 0$.

   (a) Comprueba que tiene una raíz separada en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y otra raíz separada en $[2, 3]$.

   (b) Analiza la convergencia de la sucesión generada por el método de Newton–Raphson a partir de un punto cualquiera en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Calcula x_2 a partir de $x_0 = 0$ e indica razonadamente el orden de convergencia del método.

   (c) Determina si la sucesión generada por el algoritmo:

$$x_{k+1} = \frac{1 + x_k^3}{6}, \qquad x_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

   es convergente. ¿Converge a la solución de la ecuación? En caso afirmativo, justifica cuál es el orden de convergencia del método, calcula x_2 a partir de $x_0 = 0$ y acota el error cometido al aproximar la solución de la ecuación por x_2.

   (d) Estudia la convergencia global del algoritmo del apartado anterior en el intervalo $[2, 3]$.

26. (**JUN07**) Considera la ecuación $9x - \cos(x) - 3x^2 = 0$.

   (a) Prueba que tiene una raíz separada en el intervalo $[0, 1]$.

   (b) Determina el número de iteraciones necesarias para aproximar la raíz mediante el método de bisección con un error inferior a 10^{-6}, si se toma como intervalo inicial $[0, 1]$.

   (c) Se considera la función de iteración g dada por

$$g(x) = \frac{\cos(x) + 3\,x^2}{9}.$$

      i. Escribe el algoritmo de punto fijo correspondiente en $[0, 1]$.

      ii. Prueba que el método de punto fijo con función de iteración g converge a la única raíz de la ecuación en $[0, 1]$, para cualquier aproximación inicial $x_0 \in [0, 1]$.

      iii. Realiza dos iteraciones del algoritmo partiendo de $x_0 = 0$.

(d) ¿Puede asegurarse que el método de Newton aplicado a $f(x) = 9\,x - \cos(x) - 3\,x^2$ es convergente para cualquier aproximación inicial $x_0 \in [0, 1]$? Justifica tu respuesta.

27. (**SEP07**) Un problema común de los submarinos es ubicar el punto de su trayectoria más cercano a una boya acústica (detector de sonido) en el agua. Si el submarino viaja con una trayectoria parabólica y la boya está situada en el punto $\left(2, -\dfrac{1}{2}\right)$, entonces la distancia entre el submarino y la boya es $(x-2)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2$.

   (a) Demuestra que el valor α que minimiza esa distancia es solución de la ecuación $x = \dfrac{1}{x^2+1}$.

   (b) Plantea el método de Newton–Raphson para aproximar el valor de α, justificando previamente la convergencia del método. Calcula x_1 a partir de $x_0 = 1$.

   (c) Plantea un método de punto fijo para aproximar α. Demuestra su convergencia a α. Halla una constante de contractividad y calcula x_1 a partir de $x_0 = 1$.

   Nota: Si fuera necesario, utiliza la aproximación $\sqrt{3} \approx 1.7$.

28. (**DIC07**) La función g dada por $g(x) = \dfrac{\ln(x+2)}{x+2}$ tiene un único punto fijo en el intervalo $[0, 1]$.

   (a) Determina si el algoritmo de iteración funcional converge al punto fijo de g en el intervalo $[0, 1]$. Aproxima dicho punto fijo mediante x_1, partiendo de $x_0 = 0$.

   (b) Encuentra una función f cuyos ceros sean puntos fijos de g.

   (c) Analiza la convergencia del método de Newton–Raphson para aproximar el cero de f en el intervalo $[0, 1]$.

   Nota: Utiliza, si fuera necesario, la aproximación $\ln(3) \approx 1.1$.

29. (**JUN07**) Calcula el número de condición para la evaluación de la función *logaritmo* y determina para qué valores de x la evaluación de $\ln(x)$ es un problema mal condicionado.