COMPUTACIÓN NUMÉRICA

Boletín I. **Introducción al Análisis Numérico. Errores**

1. Para aproximar la solución exacta de cierto problema se plantea un método numérico, que proporciona la sucesión: $x_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$, $k = 1, 2, \ldots$.
   (a) Obtén el valor de la solución exacta del problema.
   (b) Utilizando notación científica normalizada, y redondeando el resultado de cada operación con 8 cifras, calcula aproximaciones $\widehat{x}_{10}$ y $\widehat{x}_{20}$ a los correspondientes términos de la sucesión.
   (c) Calcula los errores de truncamiento en los pasos 10 y 20.
2. Representa en notación científica normalizada los números: $a = 1/128$, $b = 11111111$, $c = -1024$, $d = 0.000000000123$ y $x = -100\times 10^{-3}$, indicando el valor del signo, la mantisa y el exponente.
3. Se considera la representación en coma flotante de números decimales con precisión de 7 cifras en la mantisa y exponente en el intervalo $[-9, 9]$. Escribe la expresión de los números del ejercicio 2 en este sistema de representación, indicando el valor del signo, la mantisa y el exponente.
4. Obtén la expresión decimal de los siguientes números binarios: $a = 10101.11001$, $b = 1111.111111$, $c = 0.00011001100110011$ y $d = 1010.1010101010101$. Escribe la representación de los mismos según el estándar IEEE 754 en simple y doble precisión, indicando el valor del signo, la mantisa y el exponente.
5. Utilizando una calculadora que redondea a 8 dígitos en notación científica normalizada, calcula los errores relativos y absolutos entre x y $\widehat{x}$ para los siguientes valores:
   (a) $x = 10^{\pi}$, $\widehat{x} = 1400$
   (b) $x = \sqrt{14\pi}\left(\frac{7}{e}\right)^7$, $\widehat{x} = 7!$.

   Repite el ejercicio suponiendo que la calculadora redondea a 4 dígitos.
6. Escribe los siguientes números en notación científica normalizada y luego redondea, y redondea a cero, a cinco cifras decimales:
   (a) 0.12359947
   (b) -12.45073
   (c) 0.011245073
7. Aproxima los siguientes números binarios usando redondeo y redondeo a cero con p dígitos para los valores de p indicados. Determina en cada caso cuáles son los valores correspondientes en el sistema decimal y calcula el error absoluto y el error relativo.
   (a) $x = (1.010100100101)_2$, $p = 7$
   (b) $x = (1.010101110101)_2$, $p = 8$
   (c) $x = (1.1111011)_2$, $p = 6$

(d) $x = (1.101011)_2, \quad p = 5$

(e) $x = (1.011010)_2, \quad p = 4$

8. Realiza las siguientes operaciones (i) exactamente, (ii) utilizando aritmética de tres cifras y redondeo a cero en cada operación, (iii) utilizando aritmética de tres cifras y redondeo en cada operación:

   (a) $x = \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{11}\right) + \frac{3}{20}$

   (b) $x = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{11}\right) - \frac{3}{20}$

   Calcula, en cada caso, los errores absolutos y relativos entre la aproximación y el resultado exacto. Determina con cuántas cifras significativas aproximan tus resultados en cada caso al valor exacto.

9. Las medidas, aproximadas al centímetro más cercano, de los lados de un paralelepípedo rectangular son 3 cm, 4 cm y 5 cm.

   (a) ¿Cuáles son las mejores cotas superior e inferior del volumen del paralelepípedo?

   (b) ¿Cuáles son las mejores cotas superior e inferior del área de su superficie?

10. Sean $P(x) = ((x-3)x+3)x-1$ y $Q(x) = x^3 - 6.1x^2 + 3.2x + 1.5$.

    (a) Calcula $P(2.72)$ usando aritmética en coma flotante con cuatro dígitos y redondeo a cero.

    (b) Sabiendo que $P(2.72) = 5.088$ calcula el error absoluto y el error relativo de la aproximación obtenida en el apartado anterior.

    (c) Calcula $Q(4.71)$, de forma directa y mediante el método de Hörner, con aritmética de coma flotante de tres dígitos y redondeo.

11. Determina el mayor intervalo en el que debe estar $\widehat{x}$ para aproximar a x con un error relativo de, a lo sumo, 10^{-4} para:

    (a) $x = \sqrt{2}$

    (b) $x = 1500$

    (c) $x = 1.5$

    (d) $x = -4.2$

12. (**JUN06**) Se considera notación científica normalizada.

    (a) Dado el número binario $a = (100101.111)_2$, obtén su expresión decimal. Obtén la representación de a según el estándar IEEE 754 en simple precisión, indicando el valor del signo, la mantisa y el exponente.

    (b) Para calcular el valor de $\sqrt{5}$ con 4 dígitos de precisión, se plantea el método iterativo

    $$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 5}{2\,x_k}, \quad k \geq 0$$

    con $x_0 = 1$.

    i. Utilizando redondeo a 4 dígitos, calcula la aproximación $\widehat{x}_2$ de x_2.

    ii. Calcula el error de truncamiento en la segunda iteración.

    iii. Calcula el error relativo que se comete al tomar $\widehat{x}_2$ como aproximación de $\sqrt{5}$.

    Nota: Utiliza, si lo necesitas, la aproximación $\sqrt{5} \approx 2.236$.

13. Para aproximar la solución de cierto problema se construye la sucesión $\{x_k\}$ dada por:

$$\begin{cases} x_0 = 10 \\ x_{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(10 - \dfrac{x_k}{2}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

    (a) Suponiendo que la sucesión es convergente, calcula su límite.

    (b) Al utilizar una máquina que redondea a dos cifras decimales se han obtenido las siguientes aproximaciones:

    $$x_0 = \widehat{x}_0 = 10\,, \qquad \widehat{x}_1 = 2.50\,, \qquad \widehat{x}_2 = 4.38\,, \qquad \widehat{x}_3 = 3.91$$

    Calcula los errores de truncamiento y de redondeo en la segunda iteración, redondeando a dos decimales.

14. (**DIC06**) Calcula $x = \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{5}\right) + \frac{2}{3}$ usando aritmética de 3 dígitos y

    (a) redondeo a cero

    (b) redondeo.

15. (**JUN07**) Sea $a = (1101.011)_2$. Obtén su expresión decimal. Describe cómo se almacena el número a en el ordenador según el estándar IEEE 754 de doble precisión. Indica el valor del signo, la mantisa y el exponente.

16. (**DIC07**)

    (a) ¿Cómo se almacena $B = 5$ en simple precisión según el estándar IEEE754?

    (b) Representa $N = 5.06$ de las siguientes formas, si ello es posible:

        i. en notación científica normalizada

        ii. en formato en coma flotante en el sistema decimal, con dos dígitos en la mantisa y exponente en el intervalo $[-1, 5]$.