COMPUTACIÓN NUMÉRICA

Boletín IV. **Interpolación, derivación e integración numéricas**

1. (a) Calcula, mediante diferencias divididas, el polinomio de interpolación de Lagrange de grado cuatro relativo a la función $f(x) = 2^{x+1} - 5$ en los puntos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ y $x_4 = 5$. Obtén, cuando sea posible, las acotaciones del error cometido.

   (b) Calcula, utilizando el apartado anterior, una aproximación del número $r = 4\sqrt{2} - 5$, y una aproximación de la raíz de la ecuación $\log_2(y+5) = 3.5$, acotando en ambos casos el error cometido.

2. Dado el conjunto de polinomios $V = \{p \in \mathcal{P}_2 \,/\, p(x) = \alpha + \beta x^2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, se plantea el problema siguiente:

   Dada una función $f \in \mathcal{C}[a,b]$ y dos puntos $x_0, x_1 \in [a,b]$,

   ¿existe $p \in V$ tal que $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1$? ¿Es único?

   Resuelve el problema en los casos $[a,b] = [0,1]$ y $[a,b] = [-1,1]$.

3. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, y sean $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ puntos distintos en el intervalo $[a,b]$. Sea g una función que interpola a f en $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, y sea h una función que interpola a f en $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

   (a) Prueba que la función p dada por:

   $$p(x) = g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0}\,[g(x) - h(x)]$$

   interpola a f en $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

   (b) ¿Qué es p, si g y h son polinomios de grado inferior o igual a $n-1$?

   (c) Sea f una función que toma los valores siguientes:

x_i	1	2	0	3
$f(x_i)$	3	2	4	5

   Suponiendo que g y h son polinomios de grado inferior o igual a $n-1$, calcula g, h y p con las indicaciones de los apartados anteriores.

4. El valor de la aceleración de la gravedad en un punto de la superficie terrestre al nivel del mar depende de la latitud. Experimentalmente se ha obtenido la siguiente tabla de dependencia:

latitud (^{o})	0	30	45	60	90
gravedad (m/s^2)	9.780	9.793	9.806	9.819	9.832

   Aproxima, mediante interpolación de Lagrange, el valor de la gravedad en una playa de Barcelona situada a $45^o 25'$ de latitud.

5. (**JUN01**)

(a) En una laboratorio de Química se han medido las densidades del sodio a 94, 205 y 371°C, y se han obtenido los valores de 929, 902 y 860 kg/m^3, respectivamente. A partir de las mediciones, obtén mediante interpolación de Lagrange una aproximación de la densidad a 251°C. Aproxima la variación instantánea (derivada) de la densidad con respecto a la temperatura a 94°C. Suponiendo que la función $d(T)$, que relaciona densidad y temperatura, verifica:

$$\left|d''(T)\right| < 10^{-5}\,, \quad \left|d'''(T)\right| < 10^{-6}\,, \quad \left|d^{iv}(T)\right| < 10^{-7}\,, \qquad \forall T \in [50, 400],$$

obtén una acotación del error cometido en las aproximaciones anteriores.

(b) Aproxima la integral de la función $f(x) = x^{-1}$ en el intervalo $[1, 2]$ mediante la fórmula de Newton–Cotes abierta de dos nodos y la de tipo interpolatorio polinómico que se obtiene con los nodos $\{1, \frac{4}{3}, 2\}$. Calcula el valor exacto de la integral e indica qué fórmula la aproxima mejor.

6. Sea una función de clase $\mathcal{C}^5$, que toma los valores indicados en la siguiente tabla:

x_i	-1	0	1	3	4
$f(x_i)$	6	3	6	38	77

Sea S un *spline* cúbico que interpola a f en los nodos $\{x_i\}$ $(i = 0, \ldots, 4)$. Si denotamos $f_i'' = S''(x_i)$, $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$, entonces se verifica:

$$h_{i-1}f_{i-1}'' + 2(h_{i-1} + h_i)f_i'' + h_i f_{i+1}'' = 6\left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_{i-1}}\right), \qquad i = 1, 2, 3.$$

(a) Plantea el sistema de ecuaciones necesario para obtener los coeficientes f_i'' con las condiciones $f_0'' = 2f_2'' - f_1''$ y $f_4'' = f_3''$.

(b) Calcula los valores de f_i'' $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$.

(c) Razona si

$$S(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3, & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 3x^2 + 3, & \text{si } x \in [0, 1] \\ x^3 + 3x + 2, & \text{si } x \in [1, 3] \\ 9x^2 - 24x + 29, & \text{si } x \in [3, 4] \end{cases}$$

es el *spline* cúbico que verifica las condiciones del apartado 6*a*).

(d) Aproxima la integral de f en $[-1, 4]$ mediante:

$$\int_{-1}^{4} f(x)\, dx \approx \int_{-1}^{4} S(x)\, dx.$$

Razona si la aproximación utilizada es una fórmula cerrada de Newton–Cotes.

7. (a) Al girar la curva $y = x^2$ alrededor del eje OX, se genera una superficie de revolución; el área lateral de la misma en la región limitada por los planos $x = 0$ y $x = a$ viene dada por:

$$A_L(a) = 2\pi \int_0^a x^2\sqrt{1 + 4x^2}\, dx\,.$$

Obtén mediante el método de Simpson una aproximación del área para $a = \sqrt{2}$. Obtén otra aproximación mediante el método de trapecio compuesto, dividiendo el intervalo en dos subintervalos de igual longitud.

(b) Se aproxima mediante integración numérica el área que queda por debajo de la gráfica de una función positiva entre los extremos del intervalo $[0, i]$, obteniendo la siguiente tabla:

$[0, i]$	$[0, 1]$	$[0, 2]$	$[0, 3]$	$[0, 5]$
Area	3	19	85	631

Utiliza el polinomio de interpolación de Lagrange para aproximar el área para el intervalo $[0, 2.5]$. Indica, sin hacer cálculos, posibles técnicas para aproximar el valor de b, de forma que el área correspondiente al intervalo $[0, b]$ sea 100.

8. Consideramos una función que verifica:

x_i	-1	0	1
$f(x_i)$	1	0	$1/2$
$f'(x_i)$	-1	0	1

$$\max_{x\in[-1,1]} |f^{v}(x)| = 3$$

$$\max_{x\in[-1,1]} \left|f^{vi}(x)\right| = 6$$

Sabiendo que:

$$\begin{cases} h_i(x) = [L_i(x)]^2\,[1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i)] \\ \widehat{h}_i(x) = (x - x_i)\,[L_i(x)]^2\ , \end{cases}$$

calcula el polinomio de Hermite que interpola a la función en los nodos $\{-1, 0, 1\}$ y acota el error cometido al aproximar, mediante dicho polinomio, el valor de la función en $x = 1/4$.

9. En una pista de pruebas, un automóvil de 2000 kg de masa viaja a una velocidad de 30 m/s. En ese instante, se desactiva la transmisión, la velocidad empieza a disminuir y la distancia recorrida hasta alcanzar la velocidad a está dada por la integral:

$$x(a) = \int_a^{30} \frac{2000u}{10u^2 + 1200}\, du\,.$$

(a) Aproxima, mediante las fórmulas de trapecio compuesto y Simpson compuesto, la distancia recorrida hasta que el coche se detiene, utilizando $h = 5$ m/s como paso de integración. ¿Cuál de las dos fórmulas aproxima mejor el valor exacto?

(b) Deduce la fórmula de integración de Newton–Cotes abierta de dos puntos y aproxima la distancia recorrida hasta alcanzar la velocidad de 15 m/s.

10. Sea la función real $f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R})$ que verifica:

$$20 \max_{x\in[-1,4]} \left|f''(x)\right| = 20 \max_{x\in[-1,4]} \left|f'''(x)\right| = 2 \max_{x\in[-1,4]} \left|f^{iv}(x)\right| = 1$$

y define la tabla de valores:

x_i	-1	0	1	3	4
$f(x_i)$	6	3	6	38	77

(a) Calcula el polinomio p de interpolación de Lagrange de grado 2 relativo a f en los nodos $\{1, 3, 4\}$. Aproxima $f'(3)$ por una fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio polinómico con los nodos $\{1, 3, 4\}$ y acota el error cometido.

(b) Calcula el polinomio q de interpolación de Lagrange de grado 2 relativo a f en los nodos $\{-1, 0, 1\}$. Aproxima $f(0.25)$ y acota el error cometido.

(c) Justifica si la función S dada por:

$$S(x) = \begin{cases} q(x) & \text{si } x \in [-1,1] \\ p(x) & \text{si } x \in [1,4] \end{cases}$$

define un *spline* cúbico interpolador de f en $[-1,4]$.

11. (a) Obtén, mediante el método de diferencias divididas, el polinomio de grado 3 cuya gráfica pasa por los puntos $(0,0)$ y $(1,0.5)$, con pendientes respectivas de -1 y 1 en dichos puntos.

    (b) Calcula la fórmula de derivación numérica que aproxima la derivada segunda de una función g, utilizando los valores en los puntos $\{-0.5,0,1\}$. Utilízala para aproximar $g''(1)$, siendo:

    $$g(x) = \frac{x}{1+x^2}\,.$$

    (c) Utiliza la fórmula de Simpson para aproximar la integral:

    $$\int_0^1 \frac{g(x)}{x}\,dx\,.$$

12. En un circuito eléctrico, la diferencia de potencial V está dada por $V(t) = Li'(t) + Ri(t)$, donde $i(t)$ es la intensidad de corriente en el instante t. Tomando $L = 1$ y $R = 2$, se ha medido la corriente para distintos valores de t, obteniendo la tabla siguiente:

t_k	2	4	6
$i(t_k)$	3	5	9

    (a) Aproxima $V(2)$ y $V(3)$ usando los datos de la tabla.

    (b) Aproxima la carga eléctrica, $q = \displaystyle\int_2^6 i(t)\,dt$, mediante el método de trapecio compuesto.

13. (**JUN99**) Sean la función $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ y los nodos $\{x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{2}\}$.

    (a) Aproxima $f'(0)$, $f'(\frac{\pi}{6})$ y $f'(\frac{\pi}{2})$ mediante una fórmula de tipo interpolatorio polinómico

    (b) Calcula el polinomio de Hermite que interpola a f en los nodos $\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\}$. Determina una cota superior del error de aproximación en $\frac{\pi}{3}$ y verifica que la aproximación dista del valor exacto una cantidad inferior a la cota.

    (c) Aproxima $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$ mediante la fórmula compuesta del trapecio con $h = \pi/6$.

14. (**SEP99**) Cierta función f y su derivada toman en un conjunto de nodos los siguientes valores:

x_i	-1.0	0.0	0.5	1.0	2.0
$f(x_i)$	1.0366	1.7358	2.5576	3.0	1.7358
$f'(x_i)$	0.1464	1.4716	1.5576	0.0	-1.4716

    (a) Calcula el polinomio de Hermite que interpola los datos de la tabla en los nodos $\{0.5, 1, 2\}$.

    (b) Deduce una fórmula de tipo interpolatorio polinómico con tres nodos para aproximar la integral $\displaystyle\int_{-1}^{0.5} f(x)\,dx$.

(c) Utiliza las propiedades de las fórmulas de tipo interpolatorio polinómico y la fórmula deducida en el apartado 14b) para aproximar $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$.

15. (**DIC99**) En una explotación petrolífera se ha medido la profundidad del yacimiento en distintos puntos de una sección recta, obteniendo la siguiente tabla:

abscisa (en m):	x_i	0	100	150	200
profundidad (en m):	ω_i	1900	1450	1550	1690

(a) Construye la función *spline* cúbica S que interpola los datos anteriores con condiciones en los extremos $S''(0) = 0.02$ y $S''(200) = 0$.

(b) Aproxima la profundidad del yacimiento en la abscisa $x = 50$ m. ¿Debe $S(50)$ estar comprendido entre ω_0 y ω_1? Razona tu respuesta.

(c) Añadiendo el resultado anterior a la tabla y teniendo en cuenta que el área de la sección recta del yacimiento viene dada por:

$$A = \int_0^{200} (2200 - \omega(x))\; dx$$

aproxima dicha área mediante el método de Simpson compuesto.

Nota:

$$h_{i-1} f''_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) f''_i + h_i f''_{i+1} = 6\frac{\omega_{i+1} - \omega_i}{h_i} - 6\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{h_{i-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$S_i(x) = f''_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + f''_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + \left(\frac{\omega_i}{h_i} - f''_i \frac{h_i}{6}\right)(x_{i+1} - x) + \left(\frac{\omega_{i+1}}{h_i} - f''_{i+1} \frac{h_i}{6}\right)(x - x_i)$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

16. Dada una función f suficientemente derivable en toda la recta real, determina los valores de A_0 y A_1 para que la fórmula de derivación numérica

$$f'(\alpha) \approx A_0 f(a) + A_1 f(b)$$

sea de tipo interpolatorio polinómico. Aplica el resultado obtenido para aproximar la derivada de $f(x) = e^x$ en el punto $\alpha = 0.5$, con $a = 0$ y $b = 1$.

17. Determina si la función s dada por:

$$s(x) = \begin{cases} 2(x+1) + (x+1)^3\,, & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ 3 + 5x + 3x^2\,, & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 11 + 11(x-1) + 3(x-1)^2 - (x-1)^3\,, & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

es un *spline* cúbico en los puntos $\{-1, 0, 1, 2\}$ con las condiciones $s''(-1) = s''(2) = 0$.

18. (**SEP02**)

(a) Determina los valores de α y β para que

$$s(x) = \begin{cases} \alpha x(x^2 + 1)\,, & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ -\alpha x^3 + \beta x^2 - 5\alpha x + 1\,, & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

sea un *spline* cúbico que interpola a una cierta función f en los puntos $\{0, 1, 2\}$.

(b) Sea $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{17}{12}x^2 - \frac{1}{6}x$. Para los valores α y β obtenidos en el apartado anterior, ¿puede ser s un *spline* cúbico que interpola a f en los puntos $\{0, 1, 2\}$? ¿Es s el *spline* cúbico que verifica $s''(0) = s''(2) = 0$?

19. (**DIC02**)

(a) Dada una función $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$, determina las constantes A y x_0 para que la fórmula

$$\int_a^b f(x)\,dx = Af(x_0) + kf''(\theta),$$

con $k \neq 0$ y $\theta \in (a, b)$, sea exacta para polinomios del mayor grado posible.

(b) Aplica la fórmula a la función $f(x) = x^2$ para determinar el valor de k.

(c) Aproxima la integral $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx$ mediante la fórmula compuesta que se deduce de la fórmula anterior, dividiendo el intervalo de integración en dos subintervalos de igual longitud, y obtén una acotación del error cometido.

20. (**JUN03**) Sea la función f, definida por $f(x) = x^{-1}$ para $x \neq 0$.

(a) Obtén el polinomio de Hermite relativo a f en los nodos $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$. Utilízalo para aproximar el número $z = 2/3$ y acota el error cometido.

(b) Para una función g cualquiera, aproxima $g'(2)$ y $g''(3)$ mediante fórmulas de derivación numérica de tipo interpolatorio polinómico, utilizando los nodos $\{1, 2, 4\}$. Aplícalas a la función f y acota, cuando sea posible, el error cometido.

(c) Calcula el *spline* de orden uno, S, relativo a la función f y a los nodos $\{0, 1.5, 2\}$. Aproxima la integral:

$$\int_1^2 f(x)\,dx \approx \int_1^2 S(x)\,dx$$

Indica, justificadamente, qué conocida fórmula de integración se obtiene.

21. (**SEP03**) Sea $Q(t) = \cos(\pi t)$ la carga eléctrica de un circuito en un instante de tiempo t.

(a) Aproxima el valor de la carga en $t = 0.25$ mediante el polinomio de Hermite, P_1, relativo a Q y a los instantes de tiempo $\{0, 0.5\}$. Estima el error cometido.

(b) Calcula el polinomio de Hermite, P_2, relativo a Q y a los instantes $\{0.5, 1\}$ y justifica si la función:

$$f(t) = \begin{cases} P_1(t)\,, & \text{si } 0 \leq t \leq 0.5 \\ P_2(t)\,, & \text{si } 0.5 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es el *spline* cúbico relativo a Q y a los instantes $\{0, 0.5, 1\}$ para las condiciones $f''(0) = 8 + 4\pi$ y $f''(1) = 16 - 4\pi$.

(c) Aproxima la integral I mediante la fórmula:

$$I = \int_0^{0.5} Q(t)\,dt \approx \int_0^{0.5} P_1(t)\,dt\,.$$

Comprueba que el grado de precisión de la fórmula es al menos tres.

22. (**DIC03**) Sea f una función que verifica:

$$f(0.1) = 2, \quad f(0.2) = 1, \quad f(0.4) = 3, \quad f'(0.2) = 0, \quad f'(0.4) = 0,$$
$$\left| f^{(i)}(x) \right| \leq (5\pi)^i, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(a) Calcula el polinomio de Lagrange relativo a f en los nodos $\{0.1, 0.2, 0.4\}$. Aproxima con él $f(0.3)$ y acota el error cometido.

(b) Calcula el polinomio de Hermite relativo a f en los nodos $\{0.2, 0.4\}$. Aproxima con él $f(0.3)$ y acota el error cometido.

23. (**DIC03**) Sea g una función que verifica $g(-2) = -7$, $g(0) = 1$, $g(1) = 1$ y $g(2) = -1$. Calcula, si es posible, el valor de las constantes a, b, c y d para que

$$S(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2, & \text{si } x \in [-2, 0] \\ a + bx + cx^2 + dx^3, & \text{si } x \in [0, 1] \\ 3 - 2x, & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

sea el *spline* cúbico que interpola a la función g en los nodos $\{-2, 0, 1, 2\}$, con las condiciones $g''(2) = 0$ y $g''(-2) = -4$.

24. (**JUN04**) Supongamos que

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ x^3, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

interpola una tabla de valores $\{x_i, \omega_i\}$, donde los nodos son $x_i = -2 + 2i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$.

(a) Construye la tabla. Prueba que S es un *spline* cúbico.

(b) Calcula $S''(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, 3$.

(c) Obtén el *spline* cúbico asociado a la tabla del apartado 24a) y que verifica $f_0'' = 0$ y $f_3'' = 0$.

Nota:

$$h_{i-1} f_{i-1}'' + 2(h_{i-1} + h_i) f_i'' + h_i f_{i+1}'' = 6\frac{\omega_{i+1} - \omega_i}{h_i} - 6\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{h_{i-1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$S_i(x) = f_i'' \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + f_{i+1}'' \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + \left(\frac{\omega_i}{h_i} - f_i'' \frac{h_i}{6} \right) (x_{i+1} - x) + \left(\frac{\omega_{i+1}}{h_i} - f_{i+1}'' \frac{h_i}{6} \right) (x - x_i)$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

25. (**SEP04**) Sea $p_H(x) = x^4 + x + 1$ el polinomio de Hermite que interpola una función f en los nodos $\{-1, 0, 1, 3\}$.

(a) Calcula $f(x_i)$ y $f'(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, 3$.

(b) Construye el polinomio de Lagrange que interpola a f en los nodos x_i $(i = 0, \ldots, 3)$.

(c) Aproxima, mediante fórmulas de tipo interpolatorio polinómico que utilicen todos los nodos:

i. $f'(x_i), \quad i = 0, 1, 2, 3$

ii. $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\, dx.$

(d) Aproxima $f(2)$ mediante p_H y el polinomio de Lagrange obtenido en el apartado 25b). Sabiendo que:

$$\left|f^{(j}(x)\right| \leq \frac{1}{j}\,, \quad x \in [-1,3]$$

acota el error cometido en ambos casos. ¿Cuál es, en principio, la mejor aproximación de $f(2)$?

26. (**DIC01**)

(a) Sabiendo que la carga eléctrica en un circuito viene dada en cada instante t por $Q(t) = cos(\pi t)$, aproxima su valor en el instante $t_0 = 0.25$ utilizando el polinomio de interpolación de Lagrange, P, relativo a los tiempos $\{0, 0.5, 1, 1.5\}$ y acota el error cometido. Razona si el polinomio anterior define un *spline* cúbico interpolador de la función Q con las condiciones $P''(0) = Q''(0)$ y $P''(1.5) = Q''(1.5)$.

(b) Determina los valores de A, x_0 y x_1, con $x_0 < x_1$, para que la fórmula:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx A(f(x_0) + f(x_1))$$

integre exactamente polinomios de grado inferior o igual a dos. Aplica la fórmula a la función $f(x) = x^2 + 1$ y compara el resultado con el obtenido al usar la fórmula del trapecio.

27. (**SEP01**) Sea $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

(a) Calcula la expresión del polinomio de interpolación de Lagrange relativo a f en los nodos $\{0, 0.25, 0.5, 1\}$. Aproxima el valor de $f(0.75)$ y acota el error cometido en la aproximación.

(b) Obtén la expresión del polinomio de Hermite relativo a f en los nodos $\{0\,,\,1\}$. Aproxima el valor de $f(0.75)$ y acota el error cometido.

(c) Deduce la fórmula de Newton–Cotes abierta de tres nodos para aproximar la integral de una función en el intervalo $[0, 4]$. Aplícala a la función f.

28. (**JUN02**) Sea $f(x) = \sin(\pi x) - x$.

(a) Calcula el polinomio de interpolación de Lagrange relativo a la función f en los nodos $\{0, 0.5, 1\}$. Empléalo para aproximar el valor $f(0.25)$ y acota el error cometido.

(b) Deduce la fórmula abierta de Newton–Cotes de tres nodos en el intervalo $[0, 1]$, y utilízala para aproximar $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

(c) Acota el error cometido en la aproximación anterior sabiendo que para una fórmula abierta de Newton–Cotes de $n+1$ nodos en el intervalo $[a, b]$, con n par, el error $R_n(f)$ está dado por

$$R_n(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\,h^{n+3}\int_{-1}^{n+1} t\,\Pi_n(t)\,dt\,,$$

donde $\xi \in (a, b)$ y $\Pi_n(t) = t(t-1)\ldots(t-n)$.

29. (**DIC04**)

(a) Consideramos la fórmula de cuadratura:

$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx c\,[f(x_1) + f(x_2)]\,, \qquad x_1, x_2 \in [0, 2]\,, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Halla c, x_1 y x_2 para que la fórmula sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Se obtiene una fórmula de Newton–Cotes? Razona tu respuesta.

(b) Considera la fórmula de derivación numérica:

$$f''(x_1) \approx Af(x_1) + Bf(x_1 + h) + Cf(x_1 + 2h).$$

Calcula los coeficientes para que la fórmula sea de tipo interpolatorio polinómico y aproxima $f''(1)$, para $f(x) = x^3$ y $h = 2$.

30. (**SEP03**) Sea $f(x) = -\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{1+x^2}$.

   (a) Prueba que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz separada en el intervalo $[1, 4]$.

   (b) Razona si el algoritmo de Newton–Raphson es convergente en el intervalo $[1, 4]$. En caso afirmativo, calcula x_1 a partir de $x_0 = 1$.

   (c) Para calcular la raíz de $f(x) = 0$ se propone un método iterativo en el que, conocidos x_{k-2}, x_{k-1} y x_k, se construye el polinomo interpolatorio de Lagrange, p, relativo a f en esos tres puntos, y se elige x_{k+1} como la raíz de $p(x) = 0$ más cercana a x_k. Calcula x_3 mediante el método descrito, tomando $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.

31. (**SEP05**) Sean la función *seno* y los nodos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$ y $x_2 = \pi$.

   (a) Halla el polinomio de interpolación de Lagrange relativo a la función seno en los nodos x_i ($i = 0, 1, 2$). Aproxima $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ y acota el error cometido en dicha aproximación.

   (b) Considera el siguiente problema de interpolación:

   Determina los coeficientes A_0, A_1 y A_2 para que la fórmula

   $$g(x) = A_0 + A_1 \cos(x) + A_2 \cos(2x)$$

   interpole a una función dada, f, en los nodos x_i ($i = 0, 1, 2$).

   ¿Tiene solución el problema de interpolación? ¿Es única? Justifica tu respuesta.

   Aproxima $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, resolviendo mediante el método *LU* el sistema de ecuaciones lineales que aparece.

32. (**DIC05**)

   (a) Sabiendo que $P(n) = \sum_{i=1}^{n} i$ es un polinomio de segundo grado en n, calcula mediante interpolación la expresión de dicho polinomio.

   (b) Dado el intervalo $[1, b]$, $b > 1$, denotamos por x_i ($i = 0, 1, 2, 3$) los puntos del intervalo de la forma $x_i = 1 + ih$, donde h es la tercera parte de la longitud del intervalo. Para aproximar:

   $$\int_1^b f(x)\,dx$$

   se considera una fórmula de tipo interpolatorio polinómico que utiliza los nodos x_0 y x_2.

      i. Obtén la fórmula de integración numérica.

      ii. ¿Es la fórmula anterior una fórmula de Newton–Cotes? ¿Por qué? En caso afirmativo, ¿es abierta o cerrada?

      iii. Aplica dicha fórmula a $f(x) = x^{-1}$ para obtener una aproximación de $\ln(2)$.

33. (**JUN02**) Para determinar el tiempo que tardan en cruzarse las trayectorias de dos móviles es preciso resolver la ecuación:

$$f(t) = t^2 + \sin(t) - 1 = 0$$

en el intervalo $[0, 1]$.

(a) Plantea el método de Newton–Raphson, estudia su convergencia en $[0,1]$ y obtén la aproximación t_2 a partir de $t_0 = 0$. ¿Es convergente el método si se parte de $t_0 = 2$?

(b) Plantea el método de Newton-Raphson para la ecuación $F(t) = 0$, donde $F(t) = (f(t))^{1/3}$, y estudia su convergencia global en $[0,1]$ como método de iteración funcional.

(c) i. Aproxima $f'(t_k)$ utilizando la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio polinómico asociada a los nodos $\{t_{k-1}, t_k\}$ y a los valores $\{f(t_{k-1}), f(t_k)\}$.

ii. Plantea el método que se obtiene al sustituir, en la fórmula de Newton–Raphson del apartado $33a)$, $f'(t_k)$ por la aproximación obtenida en $33(c)i$. Calcula, con este nuevo método, t_2 a partir de $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$.

34. (**DIC06**) Sea f una función que verifica:

x_i	-1	0	2	3
$f(x_i)$	-5	2	10	47
$f'(x_i)$	17	0	20	57

$$\max_{x\in[-1,3]} |f'(x)| = 57 \qquad \max_{x\in[-1,3]} |f''(x)| = 46$$
$$\max_{x\in[-1,3]} |f'''(x)| = 18 \qquad \max_{x\in[-1,3]} \left|f^{(4)}(x)\right| = 0$$

(a) i. Calcula el polinomio de Lagrange relativo a la función f en los nodos $\{x_0, x_1, x_3\}$. Aproxima $f(1)$ y acota el error cometido.

ii. Calcula el polinomio de Hermite relativo a f en los nodos $\{x_0, x_3\}$. Aproxima $f(1)$ y acota el error cometido.

iii. Aproxima $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ mediante la fórmula de tipo interpolatorio polinómico con los nodos $\{x_0, x_1, x_3\}$.

(b) Razona si la función S dada por:

$$S(x) = \begin{cases} x^3 + 4x^2 - 2x - 1\,, & \text{si } x \in [-1, +1] \\ 2x^3 + 3x^2 - 3x\,, & \text{si } x \in [+1, +3] \end{cases}$$

es un *spline* cúbico sobre los nodos $\{-1, 1, 3\}$.

35. (**JUN07**) La función f dada por:

$$f(x) = \frac{2}{1+2x^2}$$

verifica:

$$\max_{x\in[0,2]} \left|f'(x)\right| = 2\,, \qquad \max_{x\in[0,2]} \left|f''(x)\right| = 8\,, \qquad \max_{x\in[0,2]} \left|f'''(x)\right| = 27\,, \qquad \max_{x\in[0,2]} \left|f^{iv}(x)\right| = 200\,.$$

(a) Calcula el polinomio de Lagrange relativo a f en los nodos $\{0, 0.5, 1\}$. Aproxima el valor de $f(0.75)$ y acota el error cometido.

(b) Calcula el polinomio de Lagrange relativo a f en los nodos $\{0, 0.5, 1, -1\}$.

(c) Aproxima $f'(1)$ mediante una fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio polinómico con los nodos $\{0, 0.5, 1\}$ y acota el error cometido.

(d) Aproxima, mediante la fórmula de trapecio compuesto con paso $h = 1/2$, la integral

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

36. (**SEP07**)

(a) Obtén, mediante diferencias divididas, el polinomio de Hermite relativo a la función $f(x) = e^x$ en los nodos $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$. Utilízalo para aproximar el valor de $\sqrt{e}$, y acota el error cometido. A la vista del resultado anterior, ¿se puede concluir que el error cometido es menor que una centésima?

Nota: **No debe utilizarse ninguna aproximación del número** e.

(b) Deduce los coeficientes de la fórmula de la fórmula de tipo interpolatorio polinómico que aproxima $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ con los nodos $\left\{0, \frac{1}{4}\right\}$.

(c) Utiliza las propiedades de las fórmulas de tipo interpolatorio polinómico y la fórmula obtenida en el apartado (b) para obtener otra fórmula de integración numérica de tipo interpolatorio polinómico que aproxime

$$\int_1^{11} g(x)\,dx\,.$$

37. (**DIC07**) Se dispone de la tabla de valores siguiente:

x_i	0	1	-1	2	-2
$f(x_i)$	6	15	-7	26	-54
$f'(x_i)$	1	10	5	0	6

y se sabe que

$$\max_{x\in[-2,2]} \left|f^{iv}(x)\right| = 24 \qquad \max_{x\in[-2,2]} \left|f^{v}(x)\right| = 2 \qquad \max_{x\in[-2,2]} \left|f^{vi}(x)\right| = 24$$

(a) Calcula, mediante el método de diferencias divididas, el polinomio de interpolación de Lagrange relativo a f en los nodos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ y $x_4 = -2$.

(b) Calcula, mediante el método de diferencias divididas, el polinomio de interpolación de Hermite relativo a f en los nodos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$. Acota el error cometido al aproximar $f(1.5)$ usando este polinomio.

(c) Utiliza el polinomio de interpolación de Lagrange calculado en el apartado 37a) para aproximar $f'(1)$. Acota el error cometido en la aproximación.