COMPUTACIÓN NUMÉRICA

Boletín V. **Resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias**

**La soluciones incluidas en este boletín pueden variar ligeramente según la precisión con la que se hagan los cálculos*

1. Un proyectil de masa 2 kg se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial $v(0) = 100$ m/s, y se va frenando debido a la gravedad y al rozamiento del aire según la ecuación:

$$mv' = -mg - kv^2$$

donde $k = 0.002$ kg/m y $g = 10$ m/s^2. Aproxima el valor $v(2)$ con un paso $h = 2$, mediante:

(a) el método de Runge-Kutta definido por la tabla:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Solución: $v(2) \approx 66.2877$

(b) el método de Euler implícito. *Solución:* $v(2) \approx 70.1562$

2. (**JUN98**) Sea el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x\,y' = 2y - 4 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

Obtén la aproximación de $y(2)$, con un paso $h = 1$, mediante:

(a) el método de Runge-Kutta dado por la tabla:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ \hline & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}$$

Solución: $y_1 = 23/4$

(b) el método de Taylor de orden 2. *Solución:* $y_1 = 6$

3. Consideremos el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = 2xy - x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Aproxima $y(0.1)$ con un paso $h = 0.1$ mediante los métodos de:

(a) Euler explícito *Solución:* $y_1 = 1$

(b) Euler implícito *Solución:* $y_1 = 1.01020408163265$

(c) trapecio *Solución:* $y_1 = 1.00505050505051$

(d) Taylor de orden dos. *Solución:* $y_1 = 1.005$

4. (**DIC98**) Consideramos el problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y' = xy + x \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Aproxima $y(0.1)$ con el paso $h = 0.1$ mediante:

(a) El método de Runge-Kutta asociado a la tabla:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Solución: $y_1 = 1.01003333$

(b) El método del trapecio. *Solución:* $y_1 = 1.010050251$

5. (**JUN99**)

(a) Para aproximar la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ se utilizan como nodos de cuadratura las raíces del polinomio $Q_2(x) = 3x^2 - 1$. Determina, con dichos nodos, una fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio polinómico que tenga un grado de precisión mayor o igual que *uno*.

(b) Utiliza la fórmula del apartado 5a) para aproximar el valor efectivo de la corriente eléctrica $i(t) = 10e^{-t}\sin 2\pi t$, dado por:

$$I_1 = \left[\int_0^1 i^2(t)\,dt\right]^{1/2}.$$

(c) En el método de Runge–Kutta implícito dado por la tabla:

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & \dfrac{1}{4} & \dfrac{3-2\sqrt{3}}{12} \\[2ex] c_2 & \dfrac{3+2\sqrt{3}}{12} & \dfrac{1}{4} \\[2ex] \hline & \beta_1 & \beta_2 \end{array}$$

los valores de c_1 y c_2 ($c_1 < c_2$) son los nodos, mientras que β_1 y β_2 son los coeficientes de la fórmula de cuadratura empleada en 5b).
Dado el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

indica cómo se obtiene la aproximación de $y((n+1)h)$ a partir de $y(nh)$. Aproxima el valor de $y(0.4)$ con $h = 0.4$.

6. (**DIC99**) Consideramos la distribución normal dada por

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Para crear una tabla de valores de la función f, tenemos en cuenta que ésta verifica el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2} \\ \\ y(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Aproxima el valor $f(0.2)$, con un paso $h = 0.1$, mediante el método de Runge–Kutta definido por la tabla:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

7. En cierta especie animal, el número de individuos (N) de una población es solución de la ecuación diferencial:

$$N' = 2N - 8t$$

donde t es el tiempo en años. Sabiendo que la población inicial es $N(0) = 3$, calcula la evolución de la población en los tres primeros años con $h = 1$ mediante:

(a) el método de Euler explícito, *Solución:* $N_3 = 41$

(b) el método de Euler implícito. *Solución:* $N_3 = 13$

8. En una pista de pruebas, un automóvil de 2000 kg de masa viaja a una velocidad de 30 m/s. En ese instante, se desactiva la transmisión y, posteriormente, la desaceleración verifica la ecuación diferencial:

$$2000\, u\, \frac{du}{dx} = -10u^2 - 1200$$

donde u es la velocidad (en m/s) y x es la distancia (en metros) recorrida desde la desactivación.

(a) Plantea el problema de valor inicial que proporciona la velocidad en función de la distancia recorrida. Aproxima mediante los métodos de Euler explícito e implícito, con $h = 10$ m, el valor de la velocidad tras recorrer 20 m. *Solución:* 26.6730, 26.8059

(b) Aproxima mediante el método de Taylor de orden 2 el valor $u(20)$, utilizando un paso $h = 10$ m. *Solución:* 26.74288308

9. Consideramos el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = 3x + 3y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Tomando $h = 0.5$, aproxima $y(1)$ mediante el método de Taylor de orden dos. *Solución:* $y_2 = 16.1875$

10. Consideramos el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' + y = x \\ y(-3) = 0\,. \end{cases}$$

Tomando un paso $h = 3$, aproxima $y(3)$ utilizando el método de Runge-Kutta descrito en la siguiente tabla:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

Solución: $y_2 = 18$

11. Sea el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{4}x^2 - y + 1 \\ y(0) = \frac{7}{5} \end{cases}$$

Aproxima, por el método de Euler implícito con paso $h = 2$, la solución del problema en $x = 6$.

Solución: $y_3 = 359/45$

12. (**JUN02**) Dado el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = 6 - 3yt \\ y(0) = 0\,, \end{cases}$$

calcula una aproximación de $y(1)$, utilizando un paso $h = 1$, mediante el método de Runge-Kutta dado por la tabla:

$$\begin{array}{c|cc} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 3/4 & 1/4 & 1/2 \\ \hline & 3/13 & 10/13 \end{array}$$

Clasifica el método, **razonando** la respuesta.

13. Consideramos el algoritmo de aproximación de la solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

dado por:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[a\, f(x_{n+1}, y_{n+1}) + b\, f(x_n, y_n)\right]$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Deduce el algoritmo a partir de una fórmula de cuadratura.

14. (**DIC02**) El método de Taylor de orden n se basa en la aproximación:

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!}\, y^{(k}(t_i)$$

Consideramos el problema del valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) - t^2 \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

(a) Obtén las aproximaciones de $y(4)$ mediante el método de Taylor para los órdenes $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$, utilizando un paso $h = 2$.

(b) Aproxima $y(4)$ mediante el método de Euler implícito.

15. En un circuito RC ideal, la carga q en el condensador es solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = 1 - 2q \\ q(0) = 0 \end{cases}$$

donde t es el tiempo en segundos. Tomando un paso $h = 0.1$,

(a) aproxima, mediante el método de Euler implícito, la carga del condensador al cabo de 0.3 segundos.

(b) aproxima la carga en $t = 0.1$ mediante el método de Runge–Kutta dado por la tabla:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ \hline & -1/2 & 3/2 \end{array}$$

16. Sea el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' - x^2 y - 1 = 0 \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Aproxima la solución del mismo en $x = 3$ mediante un método de Taylor de segundo orden y utilizando un paso $h = 1$.

17. (**DIC03**) Dado el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = 3x - y \\ y(0) = 2\,, \end{cases}$$

aproxima la solución en $x = 4$ mediante el método de Runge–Kutta dado por la tabla:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 3/2 \\ \hline & -1/2 & 3/2 \end{array}$$

y tomando un paso $h = 2$.

18. (**SEP04**) Sea el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{y}{x} \\ y(1) = 1\,. \end{cases}$$

Utiliza un paso $h = 1$ para aproximar $y(3)$ mediante:

(a) el método de Euler implícito *Solución:* 7/4

(b) el método de Taylor de orden dos *Solución:* 15/8

(c) el método de Runge–Kutta dado por la tabla:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Solución: 26/15

19. (**SEP05**) Sea la fórmula de integración numérica para una función g en $[a, b]$,

$$\int_a^b g(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx\,,$$

donde p es el polinomio de Lagrange de grado menor o igual que 1 que pasa por los puntos $(a+h, g(a+h))$ y $(a+2h, g(a+2h))$, con $h = \frac{b-a}{3}$.

(a) Deduce un esquema numérico para resolver un problema de valor inicial cualquiera.

(b) Clasifica (un paso / multipaso, explícito / implícito) el método de aproximación que proporciona el esquema numérico obtenido en el apartado anterior.

20. (**JUN06**) Un célebre actor de cine contrae fiebres virulentas mientras rueda una película en África. A consecuencia de ello, el actor fallece a las 8:00 a.m. en la habitación del hotel donde se aloja, con una temperatura corporal en el momento de su muerte de 40°C. El jefe de seguridad del hotel descubre el cuerpo sin vida dos horas después de la muerte (a las 10:00 a.m.) y avisa a la policía y al forense, que se persona a mediodía (a las 12:00 a.m.). Sabemos que la ley de Newton de enfriamiento de los cuerpos afirma:

$$T'(t) = K\,(T(t) - T_a)$$

donde $T(t)$ denota la temperatura del cuerpo t horas después de muerto, T_a es la temperatura ambiente (en grados centígrados) y K es una constante. Supondremos que la habitación del hotel estaba a una temperatura constante de 20°C, y tomaremos $K = -0.1$.

(a) Plantea el problema de valor inicial que calcula la temperatura del cadáver en cada instante.

(b) Obtén un valor aproximado de la temperatura del cadáver cuando lo descubre el jefe de seguridad del hotel. Para ello utiliza el método de Taylor de orden 1 con paso $h = 2$ horas.

Solución: $T(2) \approx 36$

(c) Obtén un valor aproximado de la temperatura del cadáver del actor cuando llega el forense. Utiliza en este caso el método de Taylor de orden 2 con paso $h = 2$ horas.

Solución: $T(4) \approx \frac{4181}{125} = 33.448$

21. (**SEP06**) Considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = \cos x - \sin x \\ y(0) = 10 \end{cases}$$

(a) Obtén una aproximacin de $y(\frac{\pi}{2})$ usando el método de Runge-Kutta definido por la tabla

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

y $h = \frac{\pi}{4}$.

Solución: $y(\pi/2) \approx 10$

(b) Utiliza el polinomio de interpolación de Hermite de la función y en los puntos 0, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{2}$ para obtener una aproximación de la solución en $\frac{\pi}{8}$. Como valores de la solución en los puntos $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{2}$, emplea las aproximaciones calculadas en el apartado anterior.

Solución: $y(\pi/8) \approx P_H(\pi/8) = \frac{320+3\pi}{32}$

22. (**JUN07**) Considera el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = \sin(x) + y \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Usando un paso $h = \frac{\pi}{4}$, calcula:

(a) la aproximación de $y(\pi/2)$, mediante el método de Euler implícito,

Solución: $y(\pi/4) \approx \frac{\pi(2\sqrt{2}+4-\pi)}{(4-\pi)^2}$

(b) la aproximación de $y(\pi/4)$, mediante el método del trapecio. *Solución:* $y(\pi/4) \approx \frac{\pi\sqrt{2}}{2(8-\pi)}$

23. (**SEP07**) La trayectoria de un cuerpo en movimiento es solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x+1} \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Calcula la posición y del cuerpo en el instante $x = 1$ utilizando:

(a) el método de Runge–Kutta dado por la tabla:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{array}$$

con paso $h = 1$ *Solución:* $y(1) \approx 2$

(b) el método de Taylor de orden 2, con paso $h = 1/2$. *Solución:* $y(1) \approx 2$

24. (**DIC07**) En una habitación cerrada a temperatura constante de 26^oC se abre una ventana para refrescarla. Sabemos que la rapidez de enfriamiento de la habitación viene dada por

$$T'(t) = 16 - T(t)\,,$$

donde t es el tiempo medido en minutos y $T(t)$ es la temperatura en el instante t. Aproxima la temperatura de la habitación a los dos minutos de haber abierto la ventana mediante los métodos siguientes:

(a) Euler implícito, *Solución:* $T(2) \approx 18.5$

(b) Taylor de orden 2, *Solución:* $T(2) \approx 18.5$

utilizando en ambos casos un paso $h = 1$.