Soluciones

COMPUTACIÓN NUMÉRICA

Facultad de Informática
3 de diciembre de 2004

Nombre: ______________ Apellidos: ______________________________

☐ Ingeniería Informática ☐ I. T. I. de Gestión ☐ I. T. I. de Sistemas

Pregunta	1	2	3	4	Prácticas	Total
Puntuación	2.25	2.25	2.25	2.25	1	10
Evaluación						

No se permite el uso de aparatos electrónicos (calculadora, teléfono móvil, ...)
No se aceptarán exámenes total o parcialmente realizados a lápiz
Cada ejercicio se entregará en uno o varios folios, independiente(s) de los demás ejercicios

1. Sea $A > 1$. Para aproximar $\alpha = 1/A$ se considera que α es raíz de la ecuación:

$$-A\,x^2 + (3A+1)\,x - 3 = 0\,.$$

   (a) Estudiar la convergencia global del método de Newton–Raphson en $[0,1]$ y en $[-1,1]$. Para aproximar $\alpha = 1/6$, plantear la sucesión del método con $x_0 = 1/2$, obtener el valor de x_1 e indicar si es convergente la sucesión x_k.

   (b) Estudiar la convergencia a α de la sucesión:

$$x_{k+1} = \frac{3}{3A+1-x_k}\,, \quad x_0 \in [0,1]$$

2. (a) Consideramos la fórmula de cuadratura:

$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx c\,[f(x_1) + f(x_2)]\,, \qquad x_1, x_2 \in [0,2]\,, \quad c \in I\!R.$$

   Halla c, x_1 y x_2 para que la fórmula sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Se obtiene una fórmula de Newton-Cotes? Razona la respuesta.

   (b) Sea la fórmula de derivación numérica:

$$f''(x_1) \approx Af(x_1) + Bf(x_1+h) + Cf(x_1+2h).$$

   Plantea el sistema de ecuaciones lineales necesario para que la fórmula sea de tipo interpolatorio polinómico. Resuelve el sistema por el método de Gauss y aproxima $f''(1)$, para $f(x) = x^3$ y $h = 2$.

3. Considérese la fórmula de integración numérica de tipo interpolatorio polinómico:

$$\int_{-1}^{+2} g(x)\,dx \approx A_0 g(0) + A_1 g(1).$$

(a) i. Deduce los valores de los coeficientes A_0 y A_1.

ii. Construye a partir de los coeficientes anteriores, y utilizando las propiedades de las fórmulas de integración de t.i.p., un método numérico para aproximar la solución de un problema de valor inicial con paso h.

(b) Utiliza el método anterior para aproximar $y(4)$, siendo y la solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = 2x - y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

arrancando el proceso con el método de Euler implícito y con paso $h = 1$.

4. De una matriz M, 3×3, con coeficientes reales, se sabe que:

- M es simétrica
- La matriz diagonal D de la descomposición del método de Jacobi asociada a M es el triple de la matriz Identidad.
- La suma de los elementos de la primera fila de M vale 5.
- La suma de los elementos de la segunda columna de M vale 6.
- La suma de los elementos de la última fila de M vale 6.

Se pide:

(a) Demuestra que el vector $(m_{12}, m_{13}, m_{23})^T$ es solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

donde m_{ij} denota el elemento de la matriz M situado en la fila i y en la columna j.

(b) Resuélvelo utilizando la factorización LU del sistema, justificando que tal factorización existe.

(c) Sea ahora el sistema de ecuaciones lineales $MX = b$ donde $b = (1,1,1)^T$. Estudia la convergencia del método de Gauss-Seidel para resolverlo.

(d) Indica cuál es el sistema que se ha de resolver para obtener $(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1})$ a partir de (x^k, y^k, z^k) en cada etapa mediante Gauss-Seidel, sin invertir matrices, y calcula $X^1 = (x^1, y^1, z^1)^T$ partiendo de $X^0 = (0,0,0)^T$.