COMPUTACIÓN NUMÉRICA

Facultad de Informática
17 de junio de 2009

Nombre: ____________________ Apellidos: ____

☐ Ingeniería Informática ☐ I. T. I. de Gestión ☐ I. T. I. de Sistemas

Ejercicio	1	2	3	Prácticas	Total
Puntuación	3	3	3	1	10
Evaluación					

Tiempo de realización: 3h 30min.

No se permite el uso de aparatos electrónicos (calculadora, teléfono móvil, ...).
No se aceptarán exámenes total o parcialmente realizados a lápiz.
Cada ejercicio se entregará en uno o varios folios, independiente(s) de los demás ejercicios.
No se valorará ninguna respuesta no justificada.

1. (a) Considera una función f que, en los nodos $x_i = -1 + i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, toma los valores $w_0 = -8$, $w_1 = -3$, $w_2 = -2$ y $w_3 = 7$, respectivamente. Calcula, mediante diferencias divididas, el polinomio de interpolación de Lagrange relativo a la función f en los nodos x_i $(i = 0, 1, 2, 3)$.

   (b) Supongamos que la función f toma el valor -5 en el nodo $x_4 = -2$. Utiliza el apartado (a) para calcular el polinomio de interpolación relativo a f en los nodos x_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$.

   (c) Utilizando el polinomio de interpolación obtenido en el apartado (a), aproxima la integral $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ con la fórmula de integración numérica de tipo interpolatorio polinómico relativa a los nodos $x_i = -1 + i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$. Esta fórmula de integración numérica, ¿es una fórmula de Newton–Cotes? En caso afirmativo, ¿es abierta o cerrada? ¿Qué orden de precisión tiene?

   (d) Utilizando el polinomio de interpolación calculado en el apartado (a), aproxima la derivada de f en el punto 1 con una fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio polinómico relativa a los nodos $x_i = -1 + i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$. Acota el error cometido en la aproximación sabiendo que

$$\left| f^{i)}(x) \right| \leq 3 \times 2^{3-i}, \quad \forall x \in [-1, 2] \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

2. (a) Resuelve mediante el método de Cholesky el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 16\,x_1 & + & 12\,x_2 & + & 24\,x_3 & = & 40 \\ 12\,x_1 & + & 10\,x_2 & + & 21\,x_3 & = & 39 \\ 24\,x_1 & + & 21\,x_2 & + & 49\,x_3 & = & 99 \end{array} \right.$$

   Nota: No hay que justificar la aplicación del método.

   (b) Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 6\,x_1 & - & 2\,x_2 & & & = & 9 \\ -2\,x_1 & + & 3\,x_2 & - & x_3 & = & 10 \\ & - & 2\,x_2 & + & 6\,x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

   Analiza la convergencia del método de Jacobi cuando se usa para resolver este sistema. Comprueba si se verifican las hipótesis del teorema de Stein-Rosenberg y justifica la convergencia del método de Gauss-Seidel. ¿Qué método converge más rápido en este caso, Jacobi o Gauss-Seidel?

(c) Plantea la ecuación del método de Euler implícito para resolver el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = 3\left(\dfrac{y}{1+t} + e^{-t}\right) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Calcula una aproximación de la solución en el instante $t = 1$, usando $h = 1$.

3. Se desea determinar la abscisa α del punto de corte de las gráficas de $y = x^2$ e $y = \frac{x^2+1}{x-1}$ que se encuentra a la derecha del eje OY. Para ello:

   (a) Transforma el problema anterior en otro que consista en hallar la raíz positiva α de una función polinómica f.

   (b) Demuestra que existe un intervalo de la forma $[n, n+1]$, con $n \in \mathbb{N}$, en el que α es raíz separada de f.

   (c) Plantea un algoritmo de Newton-Raphson que converja globalmente a α en el intervalo encontrado en el apartado (b).

   (d) Calcula una iteración, x_1, partiendo de la aproximación inicial $x_0 = n$ (el extremo izquierdo del intervalo). Calcula una iteración, $\hat{x}_1$, partiendo de la aproximación inicial $x_0 = n + 1$ (el extremo derecho del intervalo). ¿Cuál de ellas aproxima mejor a la raíz, x_1 o $\hat{x}_1$? Para responder a esta pregunta, calcula dos iteraciones con el método de dicotomía aplicado a la función f en el intervalo $[n, n+1]$ hallado en (b).