COMPUTACIÓN NUMÉRICA

Facultad de Informática
11 de diciembre de 2010

Nombre: ________________ Apellidos: ______________________________

☐ Ingeniería Informática ☐ I. T. I. de Gestión ☐ I. T. I. de Sistemas

Ejercicio	1	2	3	Prácticas	Total
Puntuación	3	3	3	1	10
Evaluación					

Tiempo de realización: 3h 30min.

No se permite el uso de aparatos electrónicos (calculadora, teléfono móvil, ...).
No se aceptarán exámenes total o parcialmente realizados a lápiz.
Cada ejercicio se entregará en uno o varios folios, independiente(s) de los demás ejercicios.
No se valorará ninguna respuesta no justificada.

1. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

   a) Calcula la factorización LU de la matriz de coeficientes, indicando si las matrices L y U son tridiagonales.
   b) Resuelve el sistema mediante el método LU.
   c) Plantea el método de Gauss–Seidel para resolver el sistema.
   d) Tomando $\mathbf{x}^{(0)} := (0,0,0)^t$, halla el primer iterante $\mathbf{x}^{(1)}$ del método de Gauss–Seidel (sin invertir ninguna matriz). Calcula los errores absoluto y relativo en norma infinito que se comete al aproximar la solución $\mathbf{x}$ por $\mathbf{x}^{(1)}$.
   e) Analiza si el método de Gauss–Seidel es convergente.
   f) Determina si la matriz de coeficientes satisface las hipótesis del teorema de Stein–Rosenberg. En caso afirmativo, ¿qué puedes deducir sobre la convergencia del método de Jacobi?

2. Para estudiar el tránsito de datos en una red, se mide su caudal $c(t)$ en Mbit/s cada 6 horas a lo largo de un día:

tiempo (horas)	caudal de datos (Mbit/s)
0	1
6	13
12	25
18	13
24	1

   a) Calcula, mediante diferencias divididas, el polinomio de interpolación de Lagrange relativo al caudal de datos $c(t)$ en los nodos $t_j := 6j$ con $j = 0,1,2,3,4$. Utilízalo para aproximar dicho caudal a las tres horas y acota el error cometido suponiendo que

$$|c^{(k)}(t)| \leq 24\,(\frac{\pi}{6})^k \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}.$$

   b) Usando los cálculos del apartado anterior, determina el polinomio de interpolación de Lagrange relativo al caudal de datos $c(t)$ en los nodos t_j con $j = 0,1,2$.

c) Aproxima la razón de cambio del caudal de datos a las seis horas, $c'(6)$, mediante la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio polinómico para los nodos t_j con $j = 0, 1, 2$. Acota el error cometido.

d) Aproxima la cantidad total de MBytes transmitidos a lo largo de la primera mitad del día, $450 \int_0^{12} c(t)\,dt$, mediante: (i) la fórmula de integración numérica de tipo interpolatorio polinómico que usa los nodos t_j con $j = 0, 1, 2$; (ii) la fórmula del trapecio compuesta con paso 6.

3. Supongamos que la red estudiada en el ejercicio anterior presenta el caudal de datos, en Mbit/s,

$$c(t) = 1 + 24\left(\sin\left(\frac{\pi\, t}{24}\right)\right)^2 .$$

a) Justifica que durante la primera mitad del día se alcanza un caudal de 11 Mbit/s en un único instante de tiempo $t^* \in [0, 12]$.

b) Sabiendo que $t^* = 5{,}3603954\ldots$, represéntalo en formato de coma flotante con una precisión de 5 dígitos utilizando: (i) redondeo a cero; (ii) redondeo. ¿Cuál de estas dos representaciones es más precisa?

c) Calcula el número de condición para la evaluación de la función $f(t) := c(t) - 11$. ¿Para qué valores de $t \in [0, 12]$ la evaluación de f es un problema mal condicionado?

d) Plantea el método de Newton–Raphson para aproximar el instante de tiempo t^*. Justifica que este método es convergente en el intervalo $[3, 6]$ y determina el orden de convergencia. Halla el primer iterante de dicho método t_1 partiendo de $t_0 = 5$ horas.

Nota: Utiliza, si lo necesitas, las razones trigonométricas de los ángulos doble y mitad

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\,; \qquad \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\,;$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos(\alpha)}{2}\,; \qquad \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}\,.$$