COMPUTACIÓN NUMÉRICA

Facultad de Informática
21 de junio de 2010

Nombre: ____________________ Apellidos: ____

☐ Ingeniería Informática ☐ I. T. I. de Gestión ☐ I. T. I. de Sistemas

Ejercicio	1	2	3	Prácticas	Total
Puntuación	3	3	3	1	10
Evaluación					

Tiempo de realización: 3h 30min.

No se permite el uso de aparatos electrónicos (calculadora, teléfono móvil,...).
No se aceptarán exámenes total o parcialmente realizados a lápiz.
Cada ejercicio se entregará en uno o varios folios, independiente(s) de los demás ejercicios.
No se valorará ninguna respuesta no justificada.

1. Considera la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 11 & 5 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

   (a) Justifica si es o no posible factorizar la matriz A en la forma LU. En caso afirmativo, calcula la factorización LU de la matriz A y utilízala para resolver el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, siendo $\mathbf{b} = (5, 21, 17)^{\mathbf{t}}$.

   (b) Escribe el algoritmo de Jacobi para resolver el sistema $L\,\mathbf{y} = \mathbf{b}$, siendo L la matriz triangular inferior determinada en el apartado (a) y $\mathbf{b} = (5, 21, 17)^{\mathbf{t}}$. Justifica la convergencia del método. Realiza una iteración partiendo de la aproximación inicial $\mathbf{y}^{(0)} = (0, 0, 0)^{\mathbf{t}}$.

   (c) Escribe el algoritmo de Gauss-Seidel para resolver el sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, siendo U la matriz triangular superior determinada en el apartado (a) e $\mathbf{y}$ la solución del sistema considerado en el apartado anterior. Justifica la convergencia del método. Realiza una iteración partiendo de la aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^{\mathbf{t}}$.

2. Considera la ecuación
$$\frac{1}{5}\cos(x) + x - \frac{1}{5} = 0\,.$$

   (a) Prueba que esta ecuación tiene una única raíz α en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

   (b) i) Plantea un método de punto fijo que genere una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ convergente a α, justificando la convergencia del método en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

   ii) Acota el error cometido al aproximar α por x_3, partiendo de $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

   iii) Determina una condición sobre el número de iteraciones que permita garantizar que el error de truncamiento es inferior a 10^{-6}, partiendo de $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

   (c) Plantea el método de Newton–Raphson para aproximar α y prueba su convergencia en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Realiza una iteración del método partiendo de $x_0 = 0$.

3. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2}$, para $x \in [-1, 1]$.

   (a) Deduce la fórmula de Newton-Cotes abierta de 3 nodos para aproximar la integral de una función continua en el intervalo $[-1, 1]$. Aproxima $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ utilizando esta fórmula.

   (b) Calcula el polinomio de interpolación de Lagrange relativo a la función f en los nodos -1, -0.5 y 0.5.

   (c) Aprovecha los cálculos del apartado anterior para determinar el polinomio de interpolación de Lagrange relativo a la función f en los nodos -1, -0.5, 0.5 y 1. Aproxima el valor $f(0)$ usando este nuevo polinomio. Calcula el error absoluto y el error relativo cometidos en la aproximación. ¿Cuántas cifras significativas tiene esta aproximación?

   (d) Sabiendo que

$$\max_{x \in [-1,1]} \left|f''(x)\right| \leq 8 \qquad \max_{x \in [-1,1]} \left|f'''(x)\right| \leq 32 \qquad \max_{x \in [-1,1]} \left|f^{4)}(x)\right| \leq 416$$

   obtén una cota del error cometido al aproximar el valor $f(0)$ usando el polinomio de interpolación calculado en el apartado (b).